Exposé 83

Niveau T.S

Intégration par parties. Exemples de changements de variable. Applications.

0. Pré Requis :

- Toute fonction continue sur un segment admet une primitive.
- $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$
- Dérivée d'une fonction composée et d'une fonction produit.
- fonctions usuelles.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

I. Intégration par parties :

1) Théorème :

Thm : Soit $u, v : I \mapsto \mathbb{R}$, $u, v \in \mathcal{C}^1(I)$.

$\forall a, b \in I \quad \int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$

[$(u'v) = (uv)' - (uv')$

uv', $(uv)'$, $u'v$ sont continues sur $[a,b]$ donc admettent des intégrales de a à b.

$$\int_a^b (u'v)(t)\,dt = \int_a^b (uv)'(t)\,dt - \int_a^b (uv')(t)\,dt$$

$$= \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt \quad]$$

2) Exemples d'utilisation.

$A(x) = \int_1^x \ln t\,dt \qquad u'(t) = 1 \quad u(t) = t \qquad v(t) = \ln t \quad v'(t) = 1/t$ ie $A(x) = \left[t\ln t\right]_1^x - \int_1^x dt = x\ln x - x + 1$

$B(x) = \int_0^1 t\,e^t\,dt = 1$

$C(x) = \int_0^\pi t^2 \sin t\,dt \underset{\uparrow \text{ 2 IPP}}{=} \pi^2 - 4$

- Intégrale de Wallis :

$n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,dt \qquad n = 0 \quad W_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \pi/2$

$n = 1 \quad W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = 1$

$n \geq 2 \quad W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos t}_{u'} \underbrace{(\cos t)^{n-1}}_{v}\,dt$

$= \underbrace{\left[\sin t (\cos t)^{n-1}\right]_0^{\pi/2}}_{0} - \int_0^{\pi/2} -\sin t (n-1)(\cos t)^{n-2} \times \sin t\,dt$

$W_n = \int_0^{\pi/2} (n-1)(\cos t)^{n-2} \sin^2 t\,dt$ or $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$W_n = (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n$

ie $\boxed{W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}}$ et $\boxed{W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$ $\boxed{W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$ [Récurrence]

II Changement de Variables :

1) Théorème :

Thm : Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. $f : J \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : I \to J$ tq $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$ alors pour tout $(a,b) \in I^2$

on a $\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$.

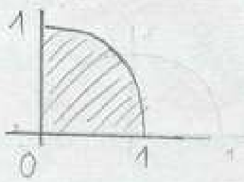
[f continue sur J donc admet une primitive sur J, F.
$(f\circ\varphi)\varphi'$ est continue sur I, admet une primitive sur I, $F\circ\varphi$
alors on a : $\int_a^b [(f\circ\varphi)\varphi'](t) = (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$]

Rq : Si φ bijective de I sur J, on a :
$\forall \alpha, \beta \in J \quad \int_\alpha^\beta f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} (f\circ\varphi)(t) \cdot \varphi'(t) dt \Leftarrow$ On utilisera le plus couramment le thm sous cette forme.

2) Exemples d'utilisation :

a) Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

On peut interpréter cette intégrale comme le quart de l'aire d'un cercle de rayon 1



$K = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ Changement de Variable,

$\varphi(t) = \sin t \quad \varphi(0) = 0 \quad \varphi(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad \varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$, $t \mapsto \sin t$

$\varphi'(t) = \cos t$

$K = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

On intègre par parties.

b) Mq $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\forall t > 0 \quad \ln t = \int_1^t \frac{dx}{x}$

$\ln ab = \int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \ln a + \underbrace{\int_a^{ab} \frac{dx}{x}}$

$\varphi(t) = at \quad \varphi(1) = a \quad \varphi(b) = ab \quad \Rightarrow \int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^b \underbrace{\frac{1}{at}}_{f(\varphi(t))} \underbrace{a}_{\varphi'(t)} dt = \ln b$

$\varphi'(t) = a$

Donc $\boxed{\ln ab = \ln a + \ln b}$

III Applications :

1) Formule de Taylor avec Reste Intégrale :

Thm : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$

alors $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$

[$n=0$ $\quad f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx$ Vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \underbrace{\frac{(b-x)^n}{n!}}_{u'} \underbrace{f^{(n+1)}}_{v}(x)dx$

on suppose que f C^{n+2} sur $[a,b]$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)} \times \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+2}(x)dx \text{]}$$

2) Calcul d'intégrale par relation de récurrence :

Calculer $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

[$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \qquad n=0 \quad I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$

$n=1 \quad I_1 = \int_0^1 \underset{v}{x} \underset{u'}{e^x} dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= e - I_0 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \left[x^n e^x \right]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^x dx = e - n I_{n-1}$]

Autre exemple ; formule de Wallis vue partie I.

3) Parité et périodicité :

Soit $h : I \to \mathbb{R}$ paire alors $\forall a \in I \int_{-a}^{a} h(t)dt = 2\int_0^a h(t)dt$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T périodique alors $\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{a+T}^{b+T} g(t)dt = \int_a^b g(t)dt$.

Chgt de Variable :

- $\varphi_1(t) = -t \quad \varphi_1(0) = 0 \quad \varphi_1(-a) = a \quad \varphi_1'(t) = -1$

donc $\int_0^a h(t)dt = \int_0^{-a} -h(-t)dt = \int_{-a}^{0} h(t)dt$ car h paire

- $\varphi_2(t) = t + T \quad \varphi_2'(t) = 1 \quad \varphi_2(a) = a + T \quad \varphi_2(b) = b + T$

donc $\int_{a+T}^{b+T} g(t)dt = \int_a^b g(t+T)dt = \int_a^b g(t)dt$ car g T périodique.