Exposé 82

Primitives d'une fonction continue sur un intervalle, définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne et application.

0_ Pré-Requis :

- Notion de continuité et de dérivabilité.
- Opérations sur les fonctions dérivables (somme, produit, composition).
- Relation entre le signe de la dérivée et le sens de variation.
-

I Primitives d'une fonction sur un intervalle.

Dans la suite, I désigne un intervalle réel infini.

1) Définition et théorème

Déf : Soit f une application de I vers $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute application F de I vers $\mathbb{R}$ qui est dérivable sur I et telle que $F' = f$.

Thm 1 : Si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est constitué des fonctions du type $x \mapsto F(x)+c$, où c est une constante réel.

[* Il est clair que l'application $x \in I \mapsto F(x)+c$ $(c \in \mathbb{R})$ est une primitive de f sur I

* Réciproquement si G est une primitive de f sur I alors $(G-F)' = G' - F' = 0$
et la fonction $G-F$ est constante sur I ie $G = F + C$ $(C \in \mathbb{R})$]

Corollaire : Si F est une primitive de f sur I et si $(a, \alpha) \in I \times \mathbb{R}$, alors il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur α en a, il s'agit : $x \in I \mapsto F(x) - F(a) + \alpha$

[Découle du thm précédent]

2) Primitives déduites du calcul différentiel.

Peut être fait à l'oral

Rq : Par définition même d'une primitive, si f est dérivable sur I alors f est une primitive de f' sur I.

Conséquence : La connaissance des dérivées des fonctions usuelles fournit celle des primitives.

* Si f et g admettent sur I des primitives F et G, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\mu F + \lambda G$ est une primitive de $\mu f + \lambda g$ sur I.

Pas de résultat analogue pour le produit et la composition

Exemple : La primitive sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ de $x \mapsto \frac{1}{1-2x}$ qui s'annule en 0 est l'application $x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(1-2x)$

3) Une condition suffisante d'existence :

Nous admettrons le résultat suivant :

Thm 2 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Rq : La continuité n'est cependant pas une condition nécessaire.
ie il $\exists$ des fcts qui admettent des primitives mais qui ne sont pas continues

Ex : $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$

$F : x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Rq : f n'est pas continue en 0 (à cause de $\cos\frac{1}{x}$) et admet une primitive sur $\mathbb{R}$

(f non continue en 0 penser à la suite $\frac{1}{n\pi} \to 0$ $\left(f\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right)_n \not\to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(0)}$)

II Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Dans cette partie, $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$.

1) Définition

Déf : Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le réel $F(b)-F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a,b]$. Ce réel sera noté $\int_a^b f(t)dt$.

Rq : Si $b<a$ on pose $\int_a^b f(t)dt := -\int_b^a f(t)dt$ et $\int_a^a f(t)dt = 0$

Rq : Si f est continue sur I et si $a \in I$, alors l'application $x \in I \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Exemples : La fonction $\ln$ est : $\ln : x \in]0,+\infty[\mapsto \int_1^x f(t)dt$ où $f : t \in]0,+\infty[\mapsto \frac{1}{t}$

Arctan est définie : $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)dt$ où $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+t^2}$

Exercice : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période T alors $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)dt$ est constante sur $\mathbb{R}$.

2) Propriétés

Soit $a, b, c \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g des fonctions continues sur I.

Prop : i) (linéarité) $\int_a^b (f+\lambda g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$

ii) (Chasles) $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

[évident]

Ex : $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\,dt$

3) Inégalités :

Thm 3 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Corollaire 3 : Si f et g sont des fcts continues sur $[a,b]$ et si $f \leq g$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

[Il suffit d'appliquer le thm précédent à $g-f$ et d'appliquer la linéarité]

Corollaire 4 : $\sup|f| = \sup\{|f(x)|,\ x \in [a,b]\}$

on a $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \leq (b-a)\sup|f|$

Corollaire 5 : (Inégalité de la moyenne)

Si f, g continues sur $[a,b]$, si g est positive sur $[a,b]$ et si $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g$

[Conséquence immédiate de $mg \leq fg \leq Mg$ et on applique le corollaire 3.]

Rq: En particulier, lorsque $g = 1$, on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

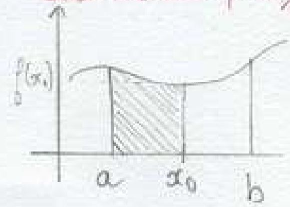
$\exists c \in [a,b] : \frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c)$, $f(c)$ est appelée valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

III Applications :

1) Aires et primitives :

Thm 4 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue sur $\mathbb{R}^+$

Soit $x_0 \in [a,b]$, $E(x_0) = \{M(x,y) \mid a \leq x \leq x_0,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$



On $A(x_0)$ l'aire de $E x_0$, et soit

$A : x \in [a,b] \mapsto A(x)$

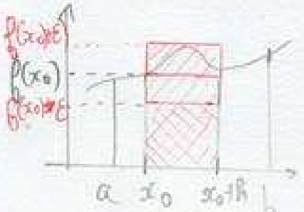
A est la primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a

soit $A(x) = \int_a^x f(t)dt$.

[L'application f est continue en $x_0 \in [a,b]$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap [a,b]$ on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

soit h tel que $|h| < \eta$ et $x_0 + h \in [a,b]$



Donc $\forall x \in [x_0, x_0 + h]$ on a : $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + f(x_0)$

Par des considérations géométriques on obtient :

$h(f(x_0) - \varepsilon) \leq A(x_0 + h) - A(x_0) \leq h(f(x_0) + \varepsilon)$

Même chose si ($h > 0$ ou $h < 0$)

Dans tous les cas on a si $0 < |h| < \eta$ $\quad f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0) + \varepsilon$

ie $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap [a,b]$ $\left|\frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$

ce qui prouve que $A'(x_0) = f(x_0)$]

2) Un encadrement élémentaire du nombre e

Rappelons que par définition, le nombre e est caractérisé par $\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$

On a alors l'encadrement $1 + \sqrt{2} < e < 3$.

Exemple : $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$: $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

[f n'est pas continue en 0 :] Soit $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_n$) $\frac{1}{n\pi} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi} \underbrace{\sin(n\pi)}_{0 \ \forall n} - \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \underset{n \to \infty}{\not\to} 0 \quad]$$

Par contre F est continue en 0 : [$\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 = F(0)$]

Donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

Thm : Tout fct C^0 sur un intervalle I admet une primitive sur I.

[1ère méthode : Posons $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour $x \in I$ et $a \in I$. Montrons que F est dérivable et que sa dérivée est f

Pour $h \neq 0$ $\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) = \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x) - hf(x))$

Avec Chasles : $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$ de plus on a $hf(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dt$

$F(x+h) - F(x) - hf(x) = \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt$

L'inégalité de la moyenne donne :

$$\left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \right| \leq |h| \sup_{t \in [x, x+h]} |f(t) - f(x)|$$

La continuité de f en x donne $\lim\limits_{h \to 0} \sup\limits_{t \in [x, x+h]} |f(t) - f(x)| = 0$

et donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$].

[2ème méthode

Par construction de l'intégrale de Riemann.

Si f est continue alors f est limite uniforme d'une fonction en escalier

On peut donc encadrer f par des fonctions en escalier dont la différence des intégrales est inférieure à $\varepsilon > 0$ ($\forall \varepsilon$ choisit)]

Ex : $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/4} \sin|t|\,dt \underset{\text{Chasles}}{=} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sin|t|\,dt + \int_0^{\pi/4} \sin|t|\,dt = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sin(-t)\,dt + \int_0^{\pi/4} \sin t\,dt$

$= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sin t\,dt + \left[-\cos t\right]_0^{\pi/4}$

$= \left[\cos t\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Thm 3 : [Si F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors $F' = f$. La positivité de f implique la croissance de F sur $[a,b]$; donc $a<b$ implique $F(b) \geq F(a)$ donc $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$]

Corollaire 4 : Pour la première inégalité on applique le corollaire 3.

car $f(t) \leq |f(t)|$ $\forall t \in [a,b]$

$$-|f| \leq f \leq |f| \; \forall t \in [a,b]$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|$$

ii) De même le corollaire 3 on a : $|f| \leq \underbrace{\sup |f|}_{\in \mathbb{R}}$

dc $\int_a^b |f| \leq \int_a^b \sup|f| = (b-a)\sup(f)$]

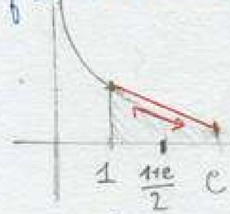
Encadrement du nombre e :

. l'application $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est convexe sur $]0,+\infty[$

(En effet f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I)

$f' : t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ $\quad f'' : t \mapsto \frac{2}{t^3}$ donc $f''>0$ $\forall t \in]0,+\infty[$ donc f' croissante sur $]0,+\infty[$ donc f convexe

f est convexe donc f est au dessus de ses tangentes sur $]0,+\infty[$.



Le graphe de f est donc au dessus de la tangente au point d'abscisse $\frac{1+e}{2}$ et au dessous de la corde sur $[1,e]$

On calcule les équations de ces deux droites.

Tangente en 1 : $y = f'\left(\frac{1+e}{2}\right)\left(x - \left(\frac{1+e}{2}\right)\right) + f\left(\frac{1+e}{2}\right) = -\frac{4}{(e+1)^2}x + \frac{2}{(e+1)} + \frac{2}{(1+e)}$

$$\boxed{y = -\frac{4}{(e+1)^2}x + \frac{4}{e+1}}$$

Corde sur $[e,1]$: $y = ax+b \iff \begin{cases} \frac{1}{e} = ae+b \\ 1 = a+b \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{e} = ae+1-a \\ b = 1-a \end{cases} \iff \begin{cases} a(e-1) = \frac{1}{e} - 1 \\ b = 1-a \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{1-e}{(e-1)e} = -\frac{1}{e} \\ b = 1 + \frac{1}{e} \end{cases}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{e}x + \left(1+\frac{1}{e}\right)}$$

On en déduit que d'après le corollaire 3 : $\int_1^e \left(\frac{-4t}{(e+1)^2} + \frac{4}{e+1}\right)dt \leq \int_1^e \frac{dt}{t} \leq \int_1^e \left(-\frac{t}{e} + \left(1+\frac{1}{e}\right)\right)dt$

$\iff \left[\frac{-2t^2}{(e+1)^2} + \frac{4t}{e+1}\right]_1^e < 1 < \left[-\frac{t^2}{2e} + \left(1+\frac{1}{e}\right)t\right]_1^e$

↑ stricte convexité de f

$$\Leftrightarrow \frac{2(e-1)}{e+1} < 1 < \frac{e^2-1}{2e}$$

On en déduit que $\frac{2(e-1)}{e+1} < 1$ et $1 < \frac{e^2-1}{2e}$

ie $2(e-1) < e+1$

$e < 3$

$2e < e^2 - 1$

$0 < e^2 - 2e - 1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4 + 4 = 8$

$x_1 = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}$

donc on en déduit que

$e > 1 + \sqrt{2}$

donc $\boxed{1 + \sqrt{2} < e < 3}$