Exposé 81

Résolution des équa diff linéaires du 2d ordre à coeff constants sans second membre. Exemples.

0 - Pré-Requis :

- Résolution d'équations différentielles linéaires du 1er ordre.
- fonction exponentielle.
- Résolution de $ax^2+bx+c=0$ ds $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Intro : But de l'exposé : Résolution d'équa diff lin du 2e ordre à coeff constants.
Utilité : on peut résoudre divers problèmes physiques comme la modélisation d'un circuit RLC en régime libre.

I Généralités :

Def : On appelle équation différentielle du second ordre à coefficients constants sans second membre toute équation différentielle (E) de la forme
$ay''+by'+cy=0$ où a,b,c sont des réels tq $a\neq 0$.
L'inconnue y est une fonction réelle ou complexe d'une variable réelle.

Def : On appelle solution de (E) sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, toute fonction f réelle ou complexe définie sur I, 2 fois dérivables sur I et tq
$\forall x\in I,\ af''(x)+bf'(x)+cf(x)=0$

Def : Résoudre une équation différentielle sur I, c'est déterminer toutes les solutions de (E) sur I.

Rq : Toute solution de (E) est en fait C^∞ (car $y''=-b/a\, y'-c/a\, y$)

Notation, on note $S_I(\mathbb{K})$ l'ensemble des solutions de (E) à valeurs dans $\mathbb{K}$ définies sur I

Prop : L'ensemble des solutions de (E) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

[- Non vide car la fonction nulle solution de (E)
- $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $f,g\in S_I(\mathbb{K})$ alors $a(\lambda f+\mu g)''+b(\lambda f+\mu g)'+c(\lambda f+\mu g)=\dots=0$ ie $\lambda f+\mu g\in S_I(\mathbb{K})$]

II Résolution de (E) : $ay''+by'+cy=0$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$

Def On appelle équation caractéristique de (E), l'équation (Ec) définie par
$ar^2+br+c=0$

1) Recherche de solutions complexes :

Prop : Soit r un complexe et $f: I\to\mathbb{C}$, $x\mapsto e^{rx}$, f est solution de (E) ssi $ar^2+br+c=0$.

[évident] $ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=\underbrace{e^{rx}}_{>0}(ar^2+br+c)$
ie f sol de (E) $\Leftrightarrow ar^2+br+c=0$

Thm : Soit Δ le discriminant de (E_c)

i) Si $\Delta \neq 0$ alors E_c admet deux racines distinctes r_1 et r_2

alors $S_I(\mathbb{C}) = \{ x \in I \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \}$

ii) Si $\Delta = 0$ alors E_c admet une racine double r

et $S_I(\mathbb{C}) = \{ x \in I \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{rx} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \}$

["$\supset$" est évident car $S(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

"$\subset$" soit f une solution de (E) et r une racine de (E_c)

On pose $g(x) = f(x) e^{-rx}$ ie $f(x) = g(x) e^{rx}$

$$f'(x) = g'(x) e^{rx} + r g(x) e^{rx}$$

$$f''(x) = g''(x) e^{rx} + r g'(x) e^{rx} + r g'(x) e^{rx} + r^2 g(x) e^{rx}$$

$$f \text{ sol de } (E) \Leftrightarrow 0 = \underbrace{e^{rx}}_{>0} \left(a g''(x) + (2ra + b) g'(x) + \underbrace{(ar^2 + br + c)}_{0} g(x) \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g''(x) = \left(-2r - \frac{b}{a}\right) g'(x)}$$

Si $\Delta = 0$ alors $r = \frac{-b}{2a}$ ie $g''(x) = 0 \overset{\text{On intègre 2 fois}}{\Rightarrow} g(x) = \lambda_1 x + \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

ie $\boxed{f(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{rx}, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}}$

Si $\Delta \neq 0$ alors 2 racines distinctes r_1 et r_2

On pose $r = r_1$ $\quad g''(x) = \left(-2r_1 - \frac{b}{a}\right) g'(x)$ or $r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$

$$g''(x) = (r_2 - r_1) g'(x)$$

équation diff du 1er ordre : ie $g'(x) = K e^{(r_2 - r_1)x}$, avec $K \in \mathbb{C}$

ie $g(x) = \frac{K}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} + \lambda_1$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$

ie $f(x) = \left(\frac{K}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} \right) \times e^{rx} + \lambda_1 e^{rx} = \boxed{\underbrace{\frac{K}{r_2 - r_1}}_{\lambda_2} e^{r_2 x} + \lambda_1 e^{r_1 x}, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}}$]

2) Recherche de solutions réelles :

Thm : * Si $\Delta > 0$ alors (E_c) admet deux racines distinctes r_1 et r_2

$S_I(\mathbb{R}) = \{ x \in I \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

* Si $\Delta = 0$ alors (E_c) admet une racine double r et

$S_I(\mathbb{R}) = \{ x \in I \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{rx} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

* Si $\Delta < 0$ alors (E_c) admet deux racines complexes conjuguées r_1, r_2

$r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.

et $S_I(\mathbb{R}) = \{ x \in I \mapsto (\lambda_1 \cos \beta x + \lambda_2 \sin \beta x) e^{\alpha x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

Lemme : Les solutions réelles de (E) coïncident avec les parties réelles des solutions complexes de (E)

On démontre le thm précédent à l'aide des solutions complexes que l'on a trouvé dans la partie précédente et en utilisant le lemme.

Corollaire : $S_I(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 2.

[Dans les 2 thms précédents, $S_I(\mathbb{K})$ apparait comme un $\mathbb{K}$ ev engendré par un couple (u, v) de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$. Il reste à vérifier que ce couple est toujours une famille libre.

i) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\Delta \neq 0$: $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$

ii) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\Delta = 0$: $u : x \mapsto x e^{rx}$ et $v : x \mapsto e^{rx}$

iii) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Delta > 0$: $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$

iv) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Delta = 0$: $u : x \mapsto x e^{rx}$ et $v : x \mapsto e^{rx}$

v) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Delta < 0$: $u : x \mapsto e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $v : x \mapsto e^{\alpha x} \sin \beta x$

Dans chaque cas on pose $\lambda u + \mu v = 0$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$

alors on obtient après dérivation : $\forall x \in I$, $\begin{cases} \lambda u(x) + \mu v(x) = 0 \\ \lambda u'(x) + \mu v'(x) = 0 \end{cases}$

Pour x_0 fixé dans I, on obtient un système homogène d'inconnue (λ, μ) dont le déterminant est : $(r_2 - r_1) e^{r_1 x_0} e^{r_2 x_0}$ ds le cas i) et iii)

$e^{2 r x_0}$ dans le cas ii) et iv)

$\beta e^{-2\alpha x_0}$ ds le cas iii)

Donc dans tous les cas le déterminant est non nul, donc solution unique et $(\lambda, \mu) = (0, 0)$.

3) Problème de Cauchy :

Thm : Pour tout $x_0 \in I$ et pour tout couple $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$, il existe un unique élément y de $S_I(\mathbb{K})$ qui satisfait aux conditions $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$

[On se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta \neq 0$ soit $y \in S_I(\mathbb{K})$ ie y sol de (E)

ie $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tq $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où r_1, r_2 racines distinctes de (Ec)

De plus $\begin{cases} \lambda e^{r_1 x_0} + \mu e^{r_2 x_0} = y_0 \\ \lambda r_1 e^{r_1 x_0} + \mu r_2 e^{r_2 x_0} = y_0' \end{cases}$ (système de Cramer)

On obtient un système homogène d'inconnue (λ, μ)
le déterminant de ce système est $\lambda \mu (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2) x_0} \neq 0$ donc solution unique]

III Applications :

1) Résoudre (E) : $y'' - 2y' + 5y = 0$

[Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 5 = 0$ admet 2 racines complexes conjuguées $r_1 = 1+2i$ et $r_2 = 1-2i$

Sol à valeurs dans $\mathbb{C}$: $S_I(\mathbb{C}) = \{\lambda e^{(1+2i)x} + \mu e^{(1-2i)x} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$

$$S_I(\mathbb{C}) = \{e^{x}(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

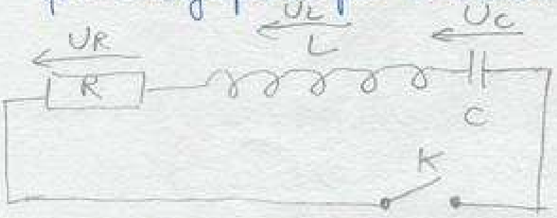
$\mathbb{R}$: $S_I(\mathbb{R}) = \{e^{x}(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$]

2) Circuit RLC en régime libre :

Il s'agit de Résoudre sur $I = [0,+\infty[$ le problème de Cauchy :
$t \in [0,+\infty[$ intervalle de tps.

$t=0$ on ferme le circuit :
$q(t)$ charge porté par le condensateur

$q(0) = CV_0$
$i(0) = q'(0) = 0$



Chercher l'équa diff vérifiée par q
On obtient un problème de Cauchy sur $I = [0,+\infty[$
(E) : $Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0$ avec $q(0) = CV_0$, $q'(0) = 0$

On a $U_C + U_L + U_R = 0$

$\frac{q(t)}{C} + L i'(t) + R i(t) = 0$ or $i = \frac{dq}{dt}$

ie $\boxed{Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0}$ sur $I = [0,+\infty[$

$\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}$

Si $\Delta > 0$ ie $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (Raisonnement analogue si $\Delta = 0$, $\Delta < 0$) $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

On a deux racines distinctes r_1 et r_2 tq $q(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$

Les conditions initiales donnent : $q(0) = CV_0 = \lambda_1 + \lambda_2$
$q'(0) = 0 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$

$\Rightarrow \lambda_1 = CV_0 - \lambda_2 \quad 0 = CV_0 r_1 - \lambda_2 r_1 + \lambda_2 r_2 \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{CV_0 r_1}{r_1 - r_2}$ $\lambda_1 = \frac{CV_0 r_1}{r_2 - r_1}$

$\boxed{q(t) = \frac{CV_0}{r_1 - r_2}\left(-r_2 e^{r_1 t} + r_1 e^{r_2 t}\right)}$

[Lemme : Les solutions réelles de (E) coïncident avec les parties réelles des solutions complexes de (E).

[* Toute solution réelle y est partie réelle d'elle même.

($y \in \mathbb{R}$ sol de (E) $\Leftrightarrow$ $Re(y) = y$ sol de (E))

* Réciproquement si y sol de (E) et y complexe

$Re(y) = \dfrac{y+\bar{y}}{2}$ sera solution de (E), comme combinaison linéaire des solutions y et $\bar{y}$]

Démonstration du thm à l'aide du lemme :

* Si $\Delta > 0$: Les racines r_1 et r_2 sont réelles.

Les solutions réelles sont $Re(y) = Re\left(\lambda_1 \underbrace{e^{r_1 x}}_{\in\mathbb{R}} + \lambda_2 \underbrace{e^{r_2 x}}_{\in\mathbb{R}}\right)$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$

d'après le lemme

$$Re(y) = Re(\lambda_1)\, e^{r_1 x} + Re(\lambda_2)\, e^{r_2 x}$$

$$\boxed{Re(y) = a_1 e^{r_1 x} + a_2 e^{r_2 x}, \ (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2}$$

* Si $\Delta = 0$: La racine double r est réelle.

Les solutions réelles sont $Re(y) = Re\left[(\lambda_1 x + \lambda_2) \underbrace{e^{rx}}_{\in\mathbb{R}}\right]$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$

d'après le lemme

$$= \left[Re(\lambda_1) x + Re(\lambda_2)\right] e^{rx}$$

$$\boxed{Re(y) = (a_1 x + a_2) e^{rx} \quad (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2}$$

* Si $\Delta < 0$ Les racines r_1 et r_2 sont complexes conjuguées.

$r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.

Les solutions réelles ont $Re(y) = Re(\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x})$ $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$

d'après le lemme

$$= Re(\lambda_1 e^{\alpha x + i\beta x} + \lambda_2 e^{\alpha x - i\beta x})$$

$$= \underbrace{e^{\alpha x}}_{\in\mathbb{R}} \left[Re(\lambda_1 e^{i\beta x} + \lambda_2 e^{-i\beta x})\right]$$

De plus $\lambda_1 = Re(\lambda_1) + i\,Im(\lambda_1)$ et $\lambda_2 = Re(\lambda_2) + i\,Im(\lambda_2)$

$$Re(y) = e^{\alpha x}\left[Re\left[\lambda_1 \cos\beta x + i\lambda_1 \sin\beta x + \lambda_2 \cos\beta x - i\lambda_2 \sin\beta x\right]\right]$$

$$= e^{\alpha x}\left(Re\left[(\lambda_1 + \lambda_2)\cos\beta x + i(\lambda_1 - \lambda_2)\sin\beta x\right]\right)$$

$$= e^{\alpha x}\left(Re\left[(\lambda_1 + \lambda_2)\cos\beta x + i\left(Re(\lambda_1 - \lambda_2) + i\,Im(\lambda_1 - \lambda_2)\right)\sin\beta x\right]\right)$$

$$= e^{\alpha x}\left(Re(\lambda_1 + \lambda_2)\cos\beta x - Re\big(\underbrace{Im(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\in\mathbb{R}}\big)\sin\beta x\right)$$

$$\boxed{Re(y) = e^{\alpha x}(a_1 \cos\beta x + a_2 \sin\beta x), \ (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2}$$