Exposé 79 :

Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites de fonctions. Calculatrice.

0 - Pré-Requis :

- Thm des valeurs intermédiaires.
- Thm de Rolle.
- Fonctions ln et exp.

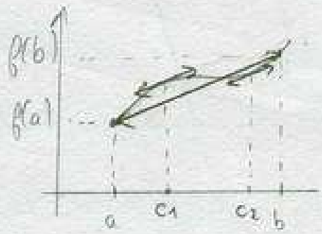
I - Inégalité des accroissements finis (IAF) :

Thm : (TAF) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

[$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in]a,b[$ tq $\varphi'(c) = 0$]



Rq : Il n'y a pas forcément unicité du c.

Corollaire : (Inégalité des accroissements finis) :
Sous les même hypothèses si de plus $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2$ tq $m \leq f'(x) \leq M \ \forall x \in]a,b[$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Rq : Pour m et M proche, si on connait $f(a)$, on peut approcher $f(b)$

Ex : $\sqrt{105}$ ie $f(x) = \sqrt{x}$ $a = 100$, $b = 105$ on $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{1}{2\sqrt{105}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{100}} \quad \forall x \in [100, 105]$$

$$\frac{1}{2\sqrt{121}} \leq \frac{1}{2\sqrt{105}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{20} \quad \text{ie} \quad \frac{1}{22} \leq f'(x) \leq \frac{1}{20}$$

$$\overset{IAF}{\Rightarrow} \frac{1}{22} \times (105 - 100) \leq \sqrt{105} - \sqrt{100} \leq \frac{1}{20}(105-100)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{10{,}22 \leq \sqrt{105} \leq 11{,}25}$$

Corollaire : f continue sur I dérivable sur $\mathring{I}$, où I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$
Alors s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ alors on a
$\forall a, b \in I \quad |f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$

ex : $|\cos b - \cos a| \leq |b - a| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

II Applications à l'étude de fonctions :

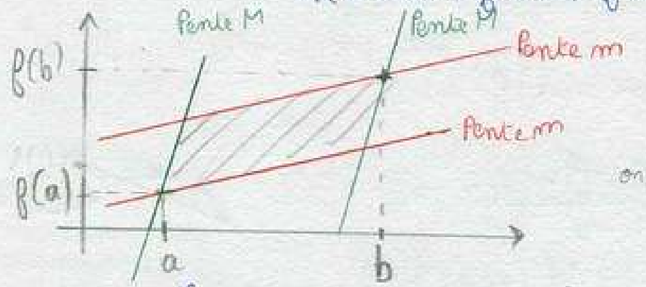
1) Interprétation graphique :

Soit f vérifiant les hypothèses du TAF :

$\forall x \in]a,b[$ on a $m(x-a)+f(a) \leq f(x) \leq M(x-a)+f(a)$

$$m(b-x) \leq f(b)-f(x) \leq M(b-x)$$

$$\times -1 \left\{ M(x-b)+f(b) \leq f(x) \leq m(x-b)+f(b) \right.$$



Ici on a $0 < m \leq M$

on peut faire $m < 0 \leq M$ ie

...

On a donc $\mathcal{C}_f$ qui se trouve dans la partie hachurée. Ex $f: \frac{1}{x}$ sur $[1,2]$

2) Principe de Lagrange :

Thm : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

i) f constante sur $[a,b]$ ssi f' nulle sur $]a,b[$.

ii) f croissante ——— ssi f' positive ———

iii) f décroissante ——— ssi f' négative sur $]a,b[$

$\Leftarrow$ avec l'IAF on a $f(b)-f(a) \leq \underset{\leq 0}{M(b-a)}$ car ssi f' négative sur $]a,b[$

0 est un majorant sur $]a,b[$ de f'

...

III Application à l'étude de suites :

1) Etude de suites par comparaison :

Etude de $(u_m)_m$, $u_m = \sum_{p=m+1}^{2m} \frac{1}{p}$

IAF appliqué à $f : [x, x+1] \to \mathbb{R}$ $\quad x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$t \longrightarrow \ln t$$

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{m+1} \leq \ln(m+1) - \ln m \leq \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m+2} \leq \ln(m+2) - \ln m \leq \frac{1}{m+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{2m} \leq \ln(2m) - \ln(2m-1) \leq \frac{1}{2m-1} \end{array}\right.$$

donc $u_m \leq \ln(2m) - \ln m \leq u_m + \frac{1}{m} - \frac{1}{2m}$

$$\Rightarrow u_m \leq \ln 2 \leq u_m + \frac{1}{2m}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \ln 2 - u_m \leq \frac{1}{2m}$$

Donc $\boxed{\lim_{m \to +\infty} u_m = \ln 2}$

2) Etude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ avec les points fixes :

Thm : (Point fixe)

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$
si $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leq k \in [0,1[$ alors $f(x) = x$
admet une unique solution dans $[a,b]$.

[Existence :

$$f(a) \geqslant a \qquad f(b) \leq b \qquad \left(\text{car } f([a,b]) \subset [a,b] \text{ ie } \begin{array}{l} a \leq f(a) \leq b \\ a \leq f(b) \leq b \end{array} \right)$$

On considère $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) - x$

$$\left.\begin{array}{l} g(a) \geqslant 0 \\ g(b) \leq 0 \\ g \text{ continue sur } [a,b] \end{array}\right\} \text{Thm des valeurs Intermédiaires} \Rightarrow \exists x \in [a,b] \text{ tq } g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$$

Unicité :

Soit x, y 2 pts fixes d'après IAF :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| \underset{\text{car } k \in [0,1[}{\Rightarrow} |x-y| < |x-y| \Rightarrow x = y$$

]

Corollaire : (Approximations successives) : Sous les hypothèses du théorème précédent. Soit $(u_n)_n$ telle que $\begin{cases} u_0 \in [a,b] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

alors $(u_n)_n$ cv et sa limite ℓ, point fixe de f est telle que
$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$

Exemple : Etude de $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} + u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$ $\qquad \ell \geqslant 0$

[$f(x) = \sqrt{\frac{3}{2} + x}$ $\qquad \ell ?$ $\quad f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = \sqrt{\frac{3}{2} + \ell}$

$$\ell^2 = \frac{3}{2} + \ell \qquad \Delta = 1 + 6 = 7$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2} + x}} \qquad \text{ie } \boxed{\ell = \frac{1+\sqrt{7}}{2}} \text{ ou } \frac{1-\sqrt{7}}{2}$$

exclut car < 0 et $\ell \geqslant 0$

$f([0,2]) \subset [0,2]$ car si $x \leq 2$ donc $\sqrt{\frac{3}{2} + x} \leq \sqrt{\frac{3}{2} + 2}$

$\forall x \in [0,2]$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} < 1$, $f(x) \leq 2$ $\sqrt{\frac{7}{2}} \leq \sqrt{\frac{8}{2}} = 2$