Exposé 78
Théorème de Rolle - Applications.

0 - Pré-requis :

- Notion de limites, de continuité et de dérivabilité.
- Si f est continue sur un segment alors f est bornée et atteint ses bornes.
- TVI

I Théorème de Rolle :

1) Théorème de Rolle :

Thm: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tel que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$.

[$f([a,b]) = [m, M]$ où $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

- Si $m = M$ alors f est constante sur $[a,b]$ donc $f' \equiv 0$ sur $[a,b]$
- Si $m \neq M$ on a $f(a) \neq m$ ou $f(b) \neq M$ (sinon on est dans le cas $m = M$ car $f(a) = f(b)$)

On suppose que $f(b) \neq M$ (or $f(a) = f(b)$ donc $f(a) \neq M$)

$\exists c \in]a,b[$ tq $f(c) = M$

f est dérivable sur $]a,b[$ et $c \in]a,b[$ donc $f'(c)$ existe

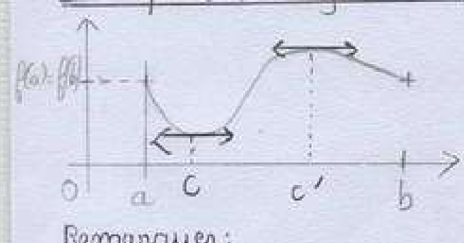
$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ or $f(c) = M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

donc $f(c+h) - f(c) \leq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } h > 0 \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{d'où } f'_d(c) \leq 0 \\ \text{Si } h < 0 \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{d'où } f'_g(c) \geq 0 \end{array}\right\} \text{donc } f'(c) = 0$$

]

Interprétation géométrique :



Rq : Ici il existe 2 pts appartenant à $]a,b[$ où la courbe admet une tangente horizontale.

Remarques :

i) $f(x) = \sin x$ sur $[0, 2\pi]$
$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2}) = 0$ } [donc il n'y a pas unicité du c ds le thm de Rolle.

ii) $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{ix}$ On a $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(x) = i e^{ix} \neq 0 \, \forall x$

[Donc le thm de Rolle ne s'applique pas dans $\mathbb{C}$

iii) $f : x \in [0,1] \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est dérivable sur $[0,1[$ discontinue en 1, on a $f(0) = f(1) = 0$ Mais $\forall x \in [0,1[$ $f'(x) = 1 \neq 0$. [Donc dans Rolle on ne peut pas se passer de la continuité en a et b.

2) Théorème de Rolle à l'infini

Thm : Soit f une fct continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Alors $\exists c \in]a,+\infty[$ tq $f'(c)=0$

II Conséquences et applications :

1) Théorème des accroissements finis :

Thm : Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors $\exists c \in]a,b[$ telque $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$

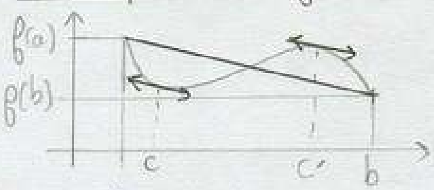
[On pose $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$g(a) = g(b) = f(a)$

$\left.\begin{array}{l} g \text{ cont sur } [a,b] \\ \text{déri sur }]a,b[\end{array}\right\} \overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists c \in]a,b[\text{ tq } g'(c)=0$

Donc $\exists c \in]a,b[$ tq $g'(c) = 0 = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$]

Interprétation géométrique :



Ici il existe 2 pts où la tangente est parallèle à la droite passant par $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$

Rq : i) $f(a)=f(b)$ (si on rajoute cette hypothèse) on a Rolle.
ii) c non unique
iii) f continue en a et b sinon ça ne marche pas.
iv) TAF ne marche pas pour les complexes.

} Rmq que pour Rolle.

Corollaire : TAF généralisé. Soit f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$
Soit g ——— $[a,b]$ ——— $]a,b[$

Alors $\exists c \in]a,b[$ tq $(f(b)-f(a))g'(c) = f'(c)(g(b)-g(a))$

2) Sens de variation d'une fonction

Thm : Soit f continue sur un intervalle I (f à valeurs ds $\mathbb{R}$) et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors :
* f constante sur $I \Leftrightarrow f'=0$ sur $\mathring{I}$
* f croissante sur $I \Leftrightarrow f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$
* f décroissante sur $I \Leftrightarrow f' \leq 0$ sur $\mathring{I}$

[* On suppose $\forall c \in \mathring{I}$, $f'(c) \geq 0$
Soit $a,b \in I$ tq $a<b$ d'après le TAF il existe $c \in]a,b[$ tq
$f(b)-f(a) = \underbrace{(b-a)}_{>0}\underbrace{f'(c)}_{\geq 0}$ donc f croissante.

* On suppose f croissante sur sur I, soit $c \in \mathring{I}$

$f'(c) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ $\left(\begin{array}{l} \text{Si } h>0 \text{ on } f(c+h)-f(c) \geq 0 \text{ et } h>0 \\ \text{si } h<0 \text{ on } f(c+h)-f(c) \leq 0 \text{ et } h<0 \end{array}\right) \Rightarrow f'(c) \geq 0$

Rq : On a pas besoin de $h<0$ car $h>0 \Rightarrow f'_d(c) \geq 0$ or f dérivable donc ie $f'_g(c) = f'_d(c) = f'(c)$]

Rq: $f' > 0 \Rightarrow f$ strictement croissante
Par contre la réciproque est fausse (ex : $f(x) = x^3$ est strict ↗ et $f'(0) = 0$)

3) Localisation des zéros d'une fonction.

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$, et admettant n zéros distincts $(n \geq 2)$ $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.
Alors f' admet au moins $(n-1)$ zéros distincts sur I, séparés par ceux de f.

4) Prolongement de fcts dérivables :

Thm : Soit I un intervalle réel infini, a un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et continue en a.
Si $\lim_{x \to a} f'(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$

Rq : Le prolongement obtenu pour f' est alors continue au point a

Ex : $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On a f est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et f est prolongeable en f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ en posant $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

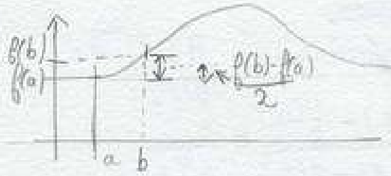
5) Règle de l'Hospital :

Thm : Soit I un intervalle réel, $a \in I$. Soit f, g deux applications de I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose f, g dérivable sur $I \setminus \{a\}$, continues en a, avec de plus $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(x) \neq 0$ pour $x \in I \setminus \{a\}$
Alors s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

6) Taylor Lagrange.

Exposé 78 : Démo :

[Thm de Rolle à l'infini



On suppose que f non constante sur $[a,+\infty[$

$\exists b \in]a,+\infty[$ tq $f(b) \neq f(a)$

On suppose $f(b) > f(a)$

D'après le thm des valeurs intermédiaires sur $[a,b]$, $\exists \alpha \in]a,b[$ tq $f(\alpha) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$

D'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a) \Rightarrow \exists\, d \in]b,+\infty[$ tq $|f(d) - f(a)| < \left|\frac{f(b)-f(a)}{2}\right|$

$$\Rightarrow \exists d \in]b,+\infty[\text{ tq } f(d) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Donc on a $f(b) > \frac{f(a)+f(b)}{2} > f(d)$

donc on applique le TVI à f sur $[b,d]$, $\exists \beta \in]b,d[$ tq $f(\beta) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$

Donc on peut appliquer Rolle sur $[\alpha,\beta]$.]

IAF généralisé :

[Soit $h : x \mapsto (g(b)-g(a))f(x) - (f(b)-f(a))g(x)$

h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

$h(a) = (g(b)-g(a))f(a) - (f(b)-f(a))g(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a)$

$h(b) = (g(b)-g(a))f(b) - (f(b)-f(a))g(b) = -g(a)f(b) + f(a)g(b)$

Donc $h(a) = h(b)$, D'après Rolle, $\exists c \in]a,b[$ tq $h'(c) = 0$

donc $\exists c \in]a,b[$ tq $(g(b)-g(a))f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c)$]

Localisation des zéros :

[Soit $a_1, \dots, a_n$ les n zéros de f rangés par ordre croissant

Pour chaque $i \in [1, n-1]$ on applique Rolle sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$

Il y a $(n-2)$ segments d'où le résultat]

Prolongement de fct dérivables.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$, il existe $\alpha > 0$ tq :

$$x \in \underbrace{(I \setminus \{a\})}_{\text{car } f' \text{ n'est pas dérivable en } a} \cap\,]a-\alpha, a+\alpha[\;\Rightarrow\; |f'(x) - \ell| < \varepsilon$$

Pour tout $x \in (I\setminus\{a\}) \cap]a-\alpha, a+\alpha[$, il existe un point $c_x \in]a,x[$

tq $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$ (IAF appliqué sur $]a,x[$)

comme $|f'(c_x) - \ell| < \varepsilon$ car $c_x \in (I\setminus\{a\}) \cap]a-\alpha, a+\alpha[$)

on en déduit que pour tout $x \in (I\setminus\{a\}) \cap]a-\alpha, a+\alpha[$) on a $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| < \varepsilon$

Finalement $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$ ie f dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

II. Hospital :

TAF généralisé $\exists c \in]a, x[$

$$\frac{f(x)-f(a)}{\underbrace{g(x)-g(a)}_{\neq 0}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \text{Rq } g(x) \neq 0 = g(a)$$

$\neq 0$ car $g(x) \neq g(a)$ car $x \neq a$ et $g'(x) \neq 0$ si $x = 0$

or $f(a) = g(a) = 0$

ie $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

De plus $|x-a| < \eta \Rightarrow |c-a| < \eta$

Donc si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$. $\square$