Exposé 77 :

Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

0. Pré-Requis :

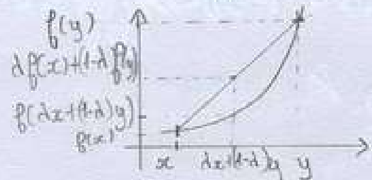
- continuité, dérivabilité, limites de fonctions. TAF

Cadre : I un intervalle de $\mathbb{R}$

I Définition de la convexité

Def : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ * f est convexe ssi $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

* f est concave ssi $-f$ est convexe



Exemples : $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto ax^2 + bx + c$ est convexe sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$

$x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$

Théorème (Inégalité de Jensen) : Soit f convexe sur I, $x_1, \dots, x_m$ m points de I, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^+$ tq $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ alors $f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)$

[Récurrence sur m] Rq : En particulier avec les $\frac{1}{m}$ hypothèses : $f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) \leq \frac{1}{m}\left(f(x_1) + \dots + f(x_m)\right)$

II Caractérisation des fonctions convexes

1. Avec les pentes :

Thm : $f : I \to \mathbb{R}$ il y a équivalence entre :

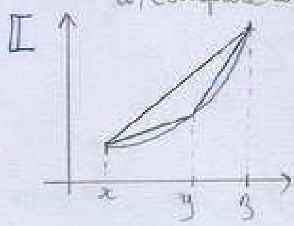
i) f convexe sur I

ii) $\forall x, y, z \in I$ $x < y < z$ $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$

iii) $\forall a \in I$, la fonction $\varphi_a(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$

ii) Compare les trois pentes ci dessous

[



i) ⇒ ii) Soit $y \in]x, z[$, $\exists \lambda \in]0,1[$, $y = \lambda x + (1-\lambda) z$ car $y - z = \lambda(x - z)$ ie $\lambda = \dots$

$\lambda = \frac{z - y}{z - x} \in]0,1[$ et $(1-\lambda) = \frac{y - x}{z - x}$ et $1 - \lambda = \frac{z - x}{z - x} - \frac{z - y}{z - x} = \frac{y - x}{z - x}$

f convexe $f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$ $(*)$

$f(y) - f(x) \leq (\lambda - 1) f(x) + (1-\lambda) f(z)$

$f(y) - f(x) \leq (1-\lambda) f(z) - f(x)$

ie $\boxed{\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}}$ car $1 - \lambda = \dots$

et $(*)$ $f(y) - f(z) \leq \lambda [f(x) - f(z)] \xrightarrow{\times -1} f(z) - f(y) \geq \lambda [f(z) - f(x)]$

$\Rightarrow \boxed{\frac{f(z) - f(y)}{z - y} \geq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}}$ car $\lambda = \dots$

ii) ⇒ iii) il suffit d'appliquer 2) en trois cas de figure $x<y<a$, $x<a<y$ et $a<x<y$
dans tous les cas on a $\varphi_a(x) < \varphi_a(y)$ donc φ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$

iii) ⇒ i) Soit $x, z \in I$, $x < z$ et $\lambda \in]0,1[$ ie $x<y<z$

posons $y = \lambda x + (1-\lambda) z$ on a $\lambda = \dfrac{y-z}{x-z}$ et $1-\lambda = \dfrac{x-y}{x-z}$ $\quad \dfrac{\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{y-z}{x-y}$

La croissance de $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(y)}{t-y}$ permet d'écrire :

$$x < z \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z-y}{x-y}\right)\left[f(x)-f(y)\right] \leq f(z)-f(y) \quad \text{car } z-y>0$$

$$\frac{-\lambda}{1-\lambda}\left[f(x)-f(y)\right] \leq f(z)-f(y)$$

$$\text{ie } \underbrace{\left[1+\frac{\lambda}{1-\lambda}\right]}_{\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)} f(y) \leq f(z) + \frac{\lambda}{1-\lambda} f(x) \Rightarrow f(y) \leq (1-\lambda) f(z) + \lambda f(x) \;]\!]$$

2) Avec la dérivabilité.

Prop : Si f est convexe sur I alors
i) f est continue en tout $a \in \mathring{I}$
ii) f admet en tout point $a \in \mathring{I}$ une dérivée à gauche et à droite.
iii) $\forall a, b \in \mathring{I}$ $a<b$, $f'_d(a) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b)$

Thm : Soit f définie et dérivable sur I.
f convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ croissante sur I.

Corollaire : Soit f définie sur I et 2-fois dérivable sur I
f convexe sur $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \; \forall x \in I$.

III Applications :

Exercice 1 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$, convexe, positive et admettant 2 zéros distincts t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$) alors f est nulle sur $[t_1, t_2]$

[[Si f n'est pas nulle sur $[t_1,t_2]$ alors $\exists t \in [t_1, t_2]$ tq $f(t) > 0$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_t(t_1) &= \frac{f(t_1)-f(t)}{t_1-t} = \frac{-f(t)}{t_1-t} > 0 \\ \varphi_t(t_2) &= \frac{f(t_2)-f(t)}{t_2-t} = \frac{-f(t)}{t_2-t} < 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \varphi_t(t_1) > \varphi_t(t_2) \\ \text{avec } t_1 < t_2 \end{array}$$

or f convexe ⇒ φ_t est donc croissante cela contredit $\varphi_t(t_1) > \varphi_t(t_2)$]]

<u>Exercice 2 :</u> Moyenne arithmétique et géométrique.

Mq $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n}$

[$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} = \exp \frac{1}{n} \ln(x_1 \dots x_n)$

$= \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)$ or exp est une fonction convexe car $(\exp x)'' = \exp x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp(\ln(x_i)) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

$\uparrow$

Inégalité de Jensen]

<u>Exercice 3 :</u>

Mq $\forall x > 0$ $\ln x \leq x - 1$

[$x \mapsto \ln x$ fonction concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $(-\ln x)'' = \frac{1}{x^2} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

ie $-\ln x$ convexe.

donc $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$

Donc $\ln x$ est en dessous de ces tangentes.

or tangente en 1 de $\ln x$: $y = f'(1)(x-1) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(1)}}$ où $f(x) = \ln x$

$y = x - 1$

D'où le résultat].

Exposé 77 : Démonstration :

Inégalité de Jensen :

[$n=2$: Définition de la convexité

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\forall j \in [1, n-1]$ l'inégalité est vérifiée au rang j.

Soit $x_1, \dots, x_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 1$

Définissons $y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}$ ny $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \lambda_0 \neq 0$ car $\lambda_i > 0 \ \forall i$

et dc $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n\right) = f(\lambda_0 y + \lambda_n x_n)$

$\leq \lambda_0 f(y) + \lambda_n x_n$ car $\lambda_0 + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

propriété à l'ordre 2

et $f(y) = f\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i}{\lambda_0}\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_0} f(x_i)$ car $\dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}{\lambda_0} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} = 1$

Hypothèse de récurrence.

Donc $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \cancel{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{\lambda_i}{\cancel{\lambda_0}} f(x_i) + \lambda_n f(x_n)$]

3) Avec la dérivabilité :

Prop. Si f convexe sur I alors.

i) f est continue en tout $a \in \mathring{I}$

ii) f admet en tout point $a \in \mathring{I}$ une dérivée à gauche et à droite.

iii) $\forall a, b \in \mathring{I}$ $a < b$, $f'_d(a) \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b)$

[ii) Soit $x < a < y$ avec $x, y, a \in I$ ie $a \in \mathring{I}$ montrons que f admet une dérivée à gauche et à droite.

$x < a < y$ ie $\dfrac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \dfrac{f(y) - f(a)}{y - a}$ (Thm II 1)

dc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(y) - f(a)}{y - a}$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \underbrace{\dfrac{f(y) - f(a)}{y - a}}_{\text{finie.}}$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe car $\varphi_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ est croissante et majorée.

Donc f dérivable à gauche en a. Même chose à droite.

or f admet une dérivée à gauche et à droite en a et dc est continue sur $\mathring{I}$

car $x < a < y$

iii) La croissance d'id (Thm I iii)) permet de conclure.]]

Thm : f définie et dérivable sur I alors
f convexe sur I $\Leftrightarrow$ f' croissante sur I.

$\boxed{\Rightarrow}$ [[Si f convexe sur I on a déjà vu (prop préc) que $f'_d(a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f \\ \text{dérivable}}}{=} f'(a) \le f'_g(b) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f \\ \text{dérivable}}}{=} f'(b)$

lorsque $a \le b$ dc f' croissante.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ $\lambda \in]0,1[$

posons $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ On a alors $x_1 < x < x_2$ et il existe

$c_1 \in]x_1, x[$ et $c_2 \in]x, x_2[$

tq $f(x) - f(x_1) = (x - x_1) f'(c_1)$ (Formule accroissement finis)

et $f(x_2) - f(x) = (x_2 - x) f'(c_2)$ (" " ")

comme $c_1 < c_2$ et donc $f'(c_1) \le f'(c_2)$ (car f' croissante.

il vient : $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$

or $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ $\quad x - x_1 = (\lambda - 1) x_1 + (1-\lambda) x_2$

$= (1-\lambda)(x_2 - x_1)$

$x_2 - x = -\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda (x_2 - x_1)$

d'où $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{(1-\lambda)\cancel{(x_2 - x_1)}} \le \dfrac{f(x_2) - f(x)}{\lambda \cancel{(x_2 - x_1)}}$ $\quad x_2 - x_1 > 0$

$\lambda [f(x) - f(x_1)] \le (1-\lambda) [f(x_2) - f(x)]$

$f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ ie f convexe]].

Corollaire : découle de f' croissante sur $I \Leftrightarrow f''(x) \ge 0 \ \forall x \in I$.