Exposé 75

Applications du calcul différentiel à la recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples calculatrices.

O-Pré-Requis :
- Continuité et dérivabilité.
- Principe de Lagrange.
- Formule de Taylor.
- Thm des valeurs intermédiaires.

I Extremums d'une fonction numérique de variable réelle.

On considère une fonction f définie sur A une partie de $\mathbb{R}$.

$f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$.

Def : f admet un maximum (resp minimum) global en a si $\forall x \in A$, $f(x) \leq f(a)$ (resp $f(x) \geq f(a)$)

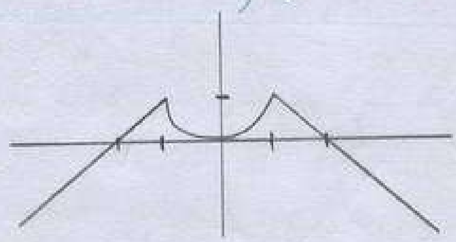
ex : $f : x \mapsto x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et $f(0) = 0$ donc 0 est un minimum global de f.

Def : f admet un maximum local (resp minimum) s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tq $\forall x \in J \cap A$, $f(x) \leq f(a)$ (resp $f(x) \geq f(a)$)

Ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \begin{cases} x+2 \text{ si } x \leq -1 \\ x^2 \text{ si } x \in]-1,1[\\ -x+2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$



f admet un minimum local en 0.

Def : f admet un extremum global (resp local) si f admet un maximum ou un minimum globale (resp local).

II Conditions nécessaires ou suffisantes d'existence d'un extremum

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$:

1) Condition locale nécessaire :

Thm : $a \in \mathring{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$ (Rq $a \in \mathring{I}$ car si a borne la dérivée à gauche ou à dr peut ne pas exister).

D. On suppose que f admet un maximum local en $a \in \mathring{I}$ donc

donc $\exists h > 0$ tq $\forall x \in J =]a-h, a+h[$ $f(x) \leq f(a)$

On considère $g : J \setminus \{a\} \longmapsto \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Donc $\forall x \in J, x < a \quad g(x) \geq 0$

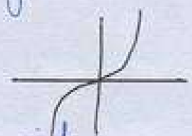
$\forall x \in J, x > a \quad g(x) \leq 0$

Donc $f'_g(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} g(x) \geq 0$

$f'_d(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) \leq 0$

Or f est dérivable en a donc $f'(a) = f'_g(a) = f'(a) = 0$.]

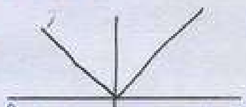
Rq : i) La réciproque est fausse :



$f : x \mapsto x^3$

$f'(0) = 0$ pourtant 0 n'est pas un extremum local.

ii) La dérivabilité n'est pas une condition necessaire



ex : $f : x \mapsto |x|$

f n'est pas dérivable en 0 pourtant 0 est un min local (et aussi global).

2) Condition globale suffisante

Thm : Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. f admet un maximum (resp min) global si $\forall x \in I \setminus \{a\}\ (x-a)f'(x) \leq 0$ et $f'(a) = 0$ (resp : $\forall x \in I \setminus \{a\}\ (x-a)f'(x) \geq 0$ et $f'(a) = 0$)

(ie f' s'annule en a en y changeant de signe)

[$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad (x-a) f'(x) \leq 0$

$\forall x \in I \cap]-\infty, a[\quad f'(x) \geq 0$

$\forall x \in I \cap]a, +\infty[\quad f'(x) \leq 0$

D'après le principe de Lagrange on a :

f croissante sur $I \cap]-\infty, a[$ et décroissante sur $I \cap]a, +\infty[$

donc $\forall x \in I \cdot f(x) \leq f(a)$]

3) Condition suffisante locale :

Thm : Soit $a \in \mathring{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable en a telle que $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$ alors f admet un maximum local si $f''(a) < 0$ et un minimum local si $f''(a) > 0$

ex : $f : x \longmapsto x + \frac{1}{x}$ $\qquad$ f def et 2 X dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ $\quad f'(1) = 0$

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad f''(1) > 0$ $\quad f$ admet un minimum local en 1.

III. Applications :

Recherche d'extremas d'une fonction :

$f : x \mapsto 3x^4 - 4x^3 + 12x - 5$

Donner une valeur approchée de f à 10^{-3} près par excès.

A la calculatrice on obtient $x \simeq -0{,}755$ $\qquad$ Avec la calculatrice FSmin on fixe borne gauche puis borne droite

On va le retrouver par le calcul

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 12 = 12(x^3 - x^2 + 1)$

$f''(x) = 12(3x^2 - 2x) = 12x(3x - 2)$

x	$-\infty$	-1	α	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $-$		0 $\nearrow$ $+$	12	$\searrow$ $+$	$\frac{92}{9}$	$\nearrow$ $+$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$f(\alpha)$	$\nearrow$				

Thm des valeurs intermédiaires, $\exists \alpha \in]-1, 0[$ tq $f'(\alpha) = 0$

On peut encadrer la valeur de $f(\alpha)$ à l'aide d'un programme de dichotomie à la calculatrice.

Thm: $a \in \mathring{I}$ $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables en a telle que $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$ alors f admet un maximum local si $f''(a) < 0$ et un minimum local si $f''(a) > 0$

[D'après le thm de Taylor Young il existe une fct ε définie sur I, continue et nulle en a tq

$$\forall x \in I \ , \ f(x) - f(a) = \underbrace{(x-a)^2}_{>0} \left(f''(a) + \varepsilon(x)\right)$$

La fonction $\varphi : x \in I \mapsto f''(a) + \varepsilon(x)$ est continue et non nulle en a donc il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que sur $J \cap I$ la fonction φ garde un signe constant, celui de $f''(a)$

ie $f(x) - f(a) \leq 0$ si $f''(a) < 0$ sur $I \cap J$

ou $f(x) - f(a) \geq 0$ si $f''(a) > 0$ sur $I \cap J$]