Exposé 74 :
Developpements limités et opérations sur les developpements limités.

0 - Pré - Requis :
- Opérations sur les polynômes.
- Formule de Taylor Young.
- Relations de Comparaison.
- IAF.

Rq : $f = \underset{x \to x_0}{o}(g) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$
$\Leftrightarrow f(x) = \underset{x \to x_0}{\varepsilon(x)} g(x)$

I Généralités :
1) Definition :
Def : Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $x_0 \in \mathring{I}$, $m \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en x_0 un developpement limité à l'ordre m, s'il existe $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ tq
$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i (x - x_0)^i + o((x - x_0)^m)$

Notation : Si f admet en x_0 un DL d'ordre m, on dit que f admet un $DL_m(x_0)$

Rq 1 : Le changement de variable $x \mapsto t = x - x_0$ permet de ramener l'étude de f au voisinage de x_0 à celle de $g(t) = f(x_0 + t)$ au voisinage de 0.

Rq 2 : Au voisinage de $+\infty$, le changement de variable $x \mapsto t = \frac{1}{x}$ permet de ramener l'étude f au voisinage de $+\infty$ à celle de $g(t) = f(\frac{1}{t}) = f(x)$ au voisinage de 0.

$\Rightarrow$ On ne mémorise que les DL en 0 car on peut tjs se ramener à ce cas.

2) Propriétés :
Prop : i) L'application f est continue en 0 ssi f admet un $DL_0(0)$
ii) L'application f est dérivable en 0 ssi f admet un $DL_1(0)$.

Rq : La prop précédente ne se généralise pas. ie f admet un $DL_m(0) \not\Rightarrow f$ m fois dérivable en 0.
Par contre la réciproque est vraie (Taylor Young).

Contre exemple : $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} f \text{ admet un } DL_2(0) \\ \text{mais } f \text{ n'est pas deux fois dérivable en } 0 \end{array} \right.$

Thm : Si f admet un $DL_m(x_0)$ alors il est unique.

$\boxed{\mathrm{D}}$ Supposons qu'il existe $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_m[X]$ tq $f(x) = P_1(x) + o(x^m) = P_2(x) + o(x^m)$
On a alors $\begin{cases} \deg(P_1 - P_2) \leq m \\ \text{au voisinage de } 0,\ P_1(x) - P_2(x) = o(x^m) \end{cases}$
Si $P_1 - P_2 \neq 0$ alors en considérant le terme de plus bas degré $\alpha_k x^k$ de $P_1 - P_2$ (donc $\alpha_k \neq 0$) Rq : l'existe car sinon $P_1 - P_2$ serait nul
On a $0 \leq k \leq m$ et $P_1(x) - P_2(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k+1} x^{k+1} + \dots + \alpha_m x^m$
$= \alpha_k x^k \underbrace{\left(1 + \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} x + \dots + \frac{\alpha_m}{\alpha_k} x^{m-k} \right)}_{\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1}$

Donc $P_1 - P_2(x) \underset{x\to 0}{\sim} \alpha_k x^k$

Ce qui contredit le fait que $P_1 - P_2(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^m)$]

Déf: Si f admet un $DL_m(0)$ alors $f(x) = P_m(x) + o(x^m)$ avec $P_m \in \mathbb{R}_m[X]$ est appelée partie régulière du $DL_m(0)$ et $o(x^m)$ est appelé le reste.

Prop: Si une fonction paire (resp impaire) admet un $DL_m(0)$ alors sa partie régulière est paire (resp impaire)

[On utilise l'unicité de la partie régulière]

Ex: $DL_m(0)$ de $\sin x$ et $\cos x$.

Prop: Si f admet un $DL_m(0)$ dont la partie régulière est $P_m(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ et si $p \leq m$ alors f admet un $DL_p(0)$ dont la partie régulière est $a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$

3) DL usuels :

Thm (Taylor Young) On suppose f définie en x_0 et n fois dérivable en x_0 alors $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + o((x-x_0)^m)$

Les DL suivant sont fournis par Taylor Young : Il s'agit de DL en 0.

$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^m}{m!} + o(x^m)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2})$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} x^m + o(x^m)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Regarder le cas particulier* $\alpha = -1$ (ie DL $\frac{1}{1+x}$) $= 1 - x + x^2 + \cdots + x^m + o(x^m)$

$1 + x + x^2 + \cdots + x^m + o(x^m)$

* Puis le chgt de variable $x \mapsto -x$ (ie DL $\frac{1}{1-x}$)

II Opérations sur les DL :

Supposons que f, g admettent un $DL_m(0)$ tq
$f(x) = P_m(x) + o(x^m)$ et $g(x) = Q_m(x) + o(x^m)$ où $P_m, Q_m \in \mathbb{R}_m[X]$

1) Combinaisons linéaires :

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_m(0)$ dont la partie régulière est $\lambda P_m + \mu Q_m$

2) Produit

$f \times g$ admet un $DL_m(0)$ dont la partie régulière est la somme des termes de $P_m(x) \times Q_m(x)$ de degré inférieur ou égal à m

Ex: $DL_5(0)$ de $\sin x \times \cos x$ $= x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$

3) Quotient

Prop : Si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ admet un $DL_m(0)$ dont la partie régulière est le quotient de la division suivant les puissances croissantes de P_m par Q_m à l'ordre m.

Exercice : $DL_5(0)$ de $\tan x$:

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ \hline -x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{4!} + o(x^5) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \\ 0 \quad \frac{2x^3}{6} - \frac{4x^5}{5!} + o(x^5) & \\ \quad - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + o(x^5) & \\ \quad 0 \quad \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) & \\ \qquad + o(x^5) & \end{array}$$

4) Composition :

Si $\lim f(x) = 0$, $g \circ f$ admet un $DL_m(0)$ dont la partie régulière est $Q_m \circ P_m$ tronquée à l'ordre m.

Exercice : $DL_4(0)$ de $e^{\sin x} = -\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + x + 1$

Rq : Pour la composition et le produit, la difficulté est de faire un DL de f et g à l'ordre suffisant pour obtenir l'ordre souhaité.

5) Intégration :

Thm : Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + o(x^m)$ et si f admet une primitive sur un intervalle ouvert I contenant 0, alors :

$$F(x) = F(0) + \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1} + o(x^{m+1})$$

D On utilise l'IAF à la fct $F(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$ sur $[0, x]$ ∎

Exercice : $\begin{cases} DL_m(0) \text{ de } \ln(1+x) \\ \qquad\quad \text{de } \operatorname{Arctan} x \end{cases}$ $\quad (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ $\quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} \underset{DL_m 0}{=} 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^m x^m + o(x^m)$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = \underbrace{\ln(1+0)}_{0} + x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^m \frac{x^{m+1}}{m+1} + o(x^{m+1})$$

6) Dérivation :

De manière générale, on ne dérive pas un DL, cependant si f' admet un $DL_m(x_0)$ et si on connait un $DL_{m+1}(x_0)$ de f, alors celui de f' s'obtient en dérivant le DL de f.

Propriétés: [i) Si f continue en 0 $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

donc $f(x) - f(0) = \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

ie $f(x) = f(0) + o(1)$ ie f admet un $DL_0(0)$

• Réciproquement : $f(x) = a_0 + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = a_0$ et donc on peut prolonger f par continuité en posant $f(0) = a_0$.

ii) Si f est continue en 0 et dérivable en 0, $\exists \ell \in \mathbb{R}$

tq $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \ell$ ie $f(x) - f(0) = x.1 + x\,\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

ie $f(x) = f(0) + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$

• Réciproquement : $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = a_0$ ∴ on pose $f(0) = a_0$

et $\frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1 + \underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} a_1$ donc f est dérivable et $f'(0) = a_1$]

Contre exemple : $f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(x) = 0$ sinon. f admet un $DL_2(0)$ mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

[f admet un $DL_2(0)$ car $f(x) = 0 + 0.x + 0.x^2 + x^2\underbrace{\left(x \sin\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow x\to 0 \; 0}$

$f(0) = 0$

f continue, dérivable pour $x \neq 0$.

$f'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$ et $f'(0) = 0$ ⟸ prolongement de la dérivabilité ($\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ ie $f'(0) = 0$)

$\cancel{f''(x) = \left(6x - \frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{x} - 4\cos\frac{1}{x}}$ ⟸ inutile de calculer f''

$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 3x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} -\cos\frac{1}{x}$

n'a pas de limite Donc f' n'est pas dérivable en 0.]

Prop (Troncature :)

[$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + \underbrace{x^p\left(a_{p+1} x + \dots + a_n x^{n-p} + o(x^n)\right)}_{o(x^p)}$]

Prop : (Parité)

[$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ or $f(x) = f(-x)$

$f(x) = P_n(-x) + o(x^n) = P_n(x) + o(x^n)$ or unicité de la partie régulière

$\Rightarrow P_n(x) = P_n(-x)$ $\hat{M}$ raisonnement pour impaire.

Prop: Linéarité [évident]

Prop: (Produit) : $f(x).g(x) = (P_m(x)+o(x^m))(Q_m(x)+o(x^m))$

[$f(x).g(x) = P_m(x).Q_m(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^m)P_m(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^m)Q_m(x)$

Avec les règles de calculs suivantes : $\underset{x\to 0}{o}(x^m)+\underset{x\to 0}{o}(x^m) = \underset{x\to 0}{o}(x^m)$

$\forall k > m \quad x^k = \underset{x\to 0}{o}(x^m)$

$k \in \mathbb{N}$ $\qquad \forall k \in \mathbb{N},\ x^k \times o(x^m) = \underset{x\to 0}{o}(x^{m+k})$

et $o(x^{m+k}) \in o(x^m) \dots$

Cela permet de conclure].

Prop: Composition :

[Même raisonnement que pour le produit]

Thm: Intégration : $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + o(x^m)$ f admet pour primitive F

[Notons $P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ $\quad \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$ est une primitive de $P(x)$ sur I

On applique le thm des accroissements finis pour x proche de 0.

$$\Big| \underbrace{\Big(F(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}\Big)}_{\text{On applique le IAF à cette fct.}} - \underbrace{F(0)}_{-\sum_{i=0}^{m} a_i \frac{0^{i+1}}{i+1} = 0} \Big| \leq \Big(\sup_{t\in[0,x]} |f(t)-P(t)|\Big).|x-0|$$

Soit $\left|F(x) - F(0) - \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}\right| \leq \sup_{t\in[0,x]} |f(t)-P(t)|.|x|$

or par hypothèse, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tq $|t| < \eta \Rightarrow |f(t)-P(t)| \leq \varepsilon |t|^m$

et l'inégalité précédente montre :

$|x| \leq \eta \Rightarrow \left|F(x) - F(0) - \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}\right| \leq \varepsilon |x|^{m+1}$

ie $F(x) - F(0) - \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1} = o(x^{m+1})$]

Prop: Composition:

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0,\ f(0)=0 \qquad g\circ f(x) = g(y) = a_0 + a_1 y + \dots + a_m y^m + o(y^m)$

où $y = f(x)$.

$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + o(x^m)$

Exemple: $e^{\sin x}$

$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^3}{3!} = \dots + o(x^3)$

Démo Division :

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + o(x^n) \\ g(x) = Q_n(x) + o(x^n) \end{cases}$$

$g(0) \neq 0$ par hypothèse.

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{P_n(x) + o(x^n)}{Q_n(x) + o(x^n)} \Rightarrow P_n(x) = Q_n(x) \times Q(x) + x^{n+1} R(x)$$

$$f(x) = Q_n(x) \times Q(x) + x^{n+1} R(x) + o(x^n)$$
$$= (g(x) + o(x^n)) \times Q(x) + x^{n+1} R(x) + o(x^n)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + o(x^n) \frac{Q(x)}{g(x)} + x^{n+1} \frac{R(x)}{g(x)} + \frac{o(x^n)}{g(x)}$$

- Rq : $o(x^n) = x^n \underset{\downarrow 0}{\mathcal{E}(x)}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + x^n \underbrace{\left[\frac{\mathcal{E}(x) Q(x)}{g(x)} + \frac{x R(x)}{g(x)} + \frac{\mathcal{E}'(x)}{g(x)} \right]}_{\downarrow x \to 0 \ \ 0}$$

$\left[x \to 0 \text{ car } \lim_{x \to 0} g(x) \neq 0 \right]$

Question : Si on a un DL pour une fonction f, existe t'il une autre fonction qui a le même DL.

$\Rightarrow$ Réponse Oui :

Si on a $f(x) = P_2(x) + o(x^2)$ ie $f(x) = P_2(x) + x^2 \underset{\downarrow x \to 0 \ \ 0}{\mathcal{E}(x)}$

Si on prend $g(x) = f(x) + x^3 \sin \frac{1}{x}$

$$g(x) = P_2(x) + x^2 \mathcal{E}(x) + x^3 \sin \frac{1}{x}$$
$$= P_2(x) + x^2 \underbrace{\left[\mathcal{E}(x) + x \sin \frac{1}{x} \right]}_{\downarrow x \to 0 \ \ 0} = P_2(x) + o(x^2)$$

Donc g a le même DL.