Exposé 73 :

Formules de Taylor. Applications.

0 – Pré-Requis :

- Notion de dérivée n-ième et de fonctions de classe C^n
- Théorème de Rolle. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$
- Inégalité des accroissements finis.

Cadre : On considère des fonctions réelles à valeurs réelles. $n \in \mathbb{N}$.

I Formules de Taylor :

1) Théorème de Taylor Lagrange :

Thm : Soit f C^n sur $[a,b]$. On suppose que f admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tq

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{(2)} \qquad (1)$$

Rq : (1) est appelée formule de Taylor Lagrange à l'ordre n.
(2) ———— le reste de Lagrange

Rq : Pour $n = 0$ on a la formule des accroissements finis.

[On considère l'application $\varphi : x \in [a,b] \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \lambda \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$

où λ est une constante choisie de sorte que $\varphi(a) = 0$

φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (évident car f d'ordre $(n+1)$ sur $]a,b[$ et C^n sur $[a,b]$)

et $\forall x \in]a,b[$ on a $\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \lambda \frac{(b-x)^n}{n!} = \frac{(b-x)^n}{n!} \left[\lambda - f^{(n+1)}(x) \right]$

De plus $\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ continue sur } [a,b] \\ \text{dérivable sur }]a,b[\\ \varphi(a) = 0 = \varphi(b) \end{array}\right\} \underset{\text{de Rolle}}{\overset{\text{D'après le thm}}{\Longrightarrow}} \exists c \in]a,b[$ tq $\varphi'(c) = 0$ ie $\lambda = f^{(n+1)}(c)$

L'égalité $\varphi(a) = 0$ donne le résultat]

Application : Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[a,b]$ tq $f^{(n)}(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$. Alors f est une fonction polynôme de degré $\leq n-1$

[Soit $x \in [a,b]$ On applique Taylor Lagrange à l'ordre $n-1$ sur $[a,x]$

on obtient $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)}_{\overset{\shortparallel}{0}}$ $\quad c \in]a,x[$

2) Formule de Taylor Young :

Thm : Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f est n fois dérivable en $a \in I$. Alors

$$\forall x \in I, \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right) \qquad (3)$$

(3) est appelée formule de Taylor Young de f au voisinage de a à l'ordre n.

[Par récurrence sur n, en utilisant le thm des accroissements finis]

Rq: La formule de Taylor Young fournit un résultat local sur la fonction f.

Applications: La formule de Taylor Young est utilisée pour donner des DL usuels:

Ex: $e^{x} = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$ $DL_n(0)$ de exp

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ ...

Même chose pour $\cos$, $(1+x)^{\alpha}$, sh, ch ...

3) Formule de Taylor avec reste intégral.

Thm: Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

[Récurrence sur n:

$n=0$: On reconnait la formule fondamentale de l'analyse:

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt$$

Si f est une fonction de classe C^{n+2}, l'hypothèse de récurrence au rang n donne: $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{n}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

On intègre par partie: $\int_a^b \frac{1}{n!}(b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

$$= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

On en déduit la formule au rang $(n+1)$]

4) Inégalité de Taylor Lagrange:

Thm: Soit f C^n sur $[a,b]$. On suppose que f admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a,b[$. S'il existe $M > 0$ tq $\forall x \in]a,b[$ $|f^{(n+1)}(x)| < M$

alors $\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

II Applications:

1) Avec Taylor Young: Calculs de limites:

Mq $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x \cos x} = 0$

Mq $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin x}{x - \sin x} = 6$

2) Etude locale de fonctions :

Soit f une fonction définie dans un voisinnage de x_0 et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentatrice.

Soit $M_0 \binom{x_0}{f(x_0)} \in \mathcal{C}_f$ et on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tq f est p-fois dérivable en x_0 et $f^{(j)}(x_0) = 0 \quad 1 < j < p$ et $f^{(p)}(x_0) \neq 0$.

Avec Taylor Young on obtient : (à l'ordre p)

$$\forall x \in \mathcal{V}(x_0), \; f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x-x_0)^p\right)$$

<u>On en déduit que</u>

- Equation de la tangente au point M_0 : $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$
- Position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $x \mapsto (x - x_0)^p f^{(p)}(x_0) + \left(o(x-x_0)^p\right)$

$o((x-x_0)^p) = (x-x_0)^p \, \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

$$\left(\text{car } f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)}_{y} + \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + o\left((x-x_0)^p\right)\right)$$

- Donc dans un voisinnage de x_0 le signe $f(x) - y$ ne dépend que du signe de $\frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0)$
- On en déduit : si p est pair on a un pt classique. ⚠ $o((x-x_0)^p)$ peut être négatif mais contenu

si $f^{(p)}(x_0) > 0$

si $f^{(p)}(x_0) < 0$

- Si p impair on a un point d'inflexion :

si $f^{(p)}(x) > 0$

si $f^{(p)}(x_0) < 0$

<u>Exemple</u> : étude de la tangente en π de $f(x) = \sin x$

Taylor Young (car f C^∞) $f(x) = f(\pi) + (x - \pi) f'(\pi) + \frac{(x-\pi)^2}{2} f''(\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} f^{(3)}(\pi) + o\left((x-\pi)^3\right)$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f(\pi) = 0$

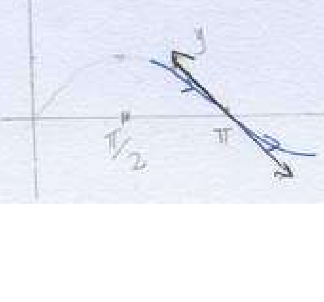
$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(\pi) = -1$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(\pi) = 0$

$f'''(x) = \cos x \Rightarrow f'''(\pi) = 1$

$$f(x) = \pi - x + \frac{(x-\pi)^3}{3!} \underbrace{f^{(3)}(\pi)}_{= 1 > 0}$$

Donc tangente en π : $y = \pi - x$



Formule de Taylor Young :

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f m fois dérivable en $a \in I$. Alors
$\forall x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{x \to a}{o}((x-a)^m)$

[Récurrence sur m :

$m=1$: Vient de la dérivabilité de f en a (ie $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$

[P_m : f m fois dérivable en $a \in I$ et
$\forall x \in I$ $f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{x \to a}{o}((x-a)^m)$

On suppose que P_{m-1} est vérifiée et f est m-fois dérivable en a.
Si f est m-fois dérivable en a, Alors f' est dérivable à l'ordre $m-1$ en a.
et on applique l'hypothèse de récurrence à f' :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + \underset{x \to a}{o}((x-a)^{m-1}) \quad (*)$$

Si l'on pose $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

La formule $(*)$ montre que $g'(x) = \underset{x \to a}{o}((x-a)^{m-1})$
ie $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $|x-a| < \eta \Rightarrow |g'(x)| \leq \varepsilon |x-a|^{m-1}$

Le thm des accroissements finis appliqué à g donne :

$$|x-a| < \eta \Rightarrow |g(x) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(a)}}| \leq \left(\sup_{t \in [a,x]} |g'(t)|\right) |x-a|$$

$$\Rightarrow \quad |g(x)| \leq \varepsilon |x-a|^m$$

ce qui donne $g(x) = o((x-a)^m)$]

Thm : (Inégalité de Taylor Lagrange).

Soit f C^m sur $[a,b]$. On suppose que f admet une dérivée d'ordre $(m+1)$ sur $]a,b[$
S'il existe $M > 0$ tq $\forall x \in]a,b[$, $|f^{(m+1)}(x)| < M$
alors $\left| f(b) - \sum_{k=0}^{m} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{m+1}}{(m+1)!}$

[Posons $\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{m} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$

et $g(x) = \frac{M|b-x|^{m+1}}{(m+1)!}$

φ et g sont continues sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

et $\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$

$g'(x) = M \frac{|b-x|^n}{n!}$

On a donc $|\varphi'(x)| \leq g'(x)$ sur $]a,b[$

donc avec l'inégalité des accroissements finis :

Rappel : IAF : Soit f, g cont sur $[a,b]$ dérivables sur $]a,b[$
On suppose que $|f'| \leq g'$ sur $]a,b[$
alors $|f(b)-f(a)| \leq g(b)-g(a)$

$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq |g(b)-g(a)|$ car $\varphi(b) = g(b) = 0$.

ie $|\varphi(a)| \leq |g(a)|$

ie $\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$]

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x \cos x} = 0$? $\cos x = 1 - x^2 + o(x^2)$

$\sin x \cos x = (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))$
$= x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

dc $\frac{1-\cos x}{\sin x \cos x} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x + o(x)} = x + o(x) \to 0$

$\lim \frac{x^2 \sin x}{x - \sin x} = 6$?

$x^2 \sin x = x^2(x + o(x))$ dc $\frac{x^2 \sin x}{x - \sin x} = 6 + o(1)$

$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

Démo : IAF : f, g cont sur $[a,b]$ dérivables sur $]a,b[$ et $|f'| \leq g'$ sur $]a,b[$

On a donc si $f' \geq 0$ $f' \leq g'$ ie $f' - g' \leq 0$ ie $(f-g)' \leq 0$

ie $f-g \searrow$ $a < b$
ie $f(a) - g(a) \geq f(b) - g(b)$ ie $\boxed{f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)}$

Si $f' \leq 0$
alors $-f' \leq g'$ ie $0 \leq f' + g'$ ie $(f+g) \nearrow$ ie $f(a) + g(a) \leq g(b) + f(b)$
ie $\boxed{-(f(b) - f(a)) \leq g(b) - g(a)}$

D'où le résultat.