Exposé 72

Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivées d'une fonction composée. Exemples.

0. Pré-Requis :

- Dérivabilité en un point : 3 définitions équivalentes
- fonctions usuelles.
- Notion de limite et continuité
- Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

$$\begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A \\ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \\ f(x_0+h) = f(x_0) + hA + h\varepsilon(h) \end{cases}$$

Cadre : f est une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$. Où D_f est un ensemble quelconque de $\mathbb{R}$, et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

[Le but de cet exposé est de passer d'une étude locale (dérivabilité en un point) à une étude globale : dérivée sur tout un ensemble.

I Fonction dérivée.

1) Définition

Def : i) On dit que f est dérivable sur $I \subset D_f$ ssi f est dérivable en tout point de I.

ii) Soit f dérivable sur $I \subset D_f$, on appelle fonction dérivée l'application

$$f' : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f'(x) \end{array}$$

2) Fonctions usuelles :

D_f	$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
$\mathbb{R}$	$k \quad k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$x^m \quad m \in \mathbb{N}^*$	$m x^{m-1}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\lvert x \rvert$	1 si $x>0$ -1 si $x<0$	$\mathbb{R}^*$ (Pas dérivable en 0)
$[0,+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\mathbb{R}^*$	$1/x$	$-1/x^2$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

[On passe par la définition de la dérivabilité en un point.]

II Opérations algébriques :

Soit f, g dérivables sur $I \subset D_f \cap D_g$

Thm : i) $(f+g)$ dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$

ii) (fg) est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$

iii) Si on suppose de plus que g ne s'annule pas sur I alors $\left(\frac{1}{g}\right)$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$

Rq : - On peut généraliser la propriété i) : une somme finie de fcts dérivables sur un même ensemble est dérivable sur cet ensemble.

- On peut étendre la propriété iii) : avec les même hypothèses :

$\left(\frac{f}{g}\right)$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \times \frac{1}{g}\right)' \underset{\text{ii) et iii)}}{\overset{\uparrow}{=}} f' \times \frac{1}{g} + f \times \frac{-g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

[i) est évident

ii) Soit $x_0 \in I$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ $\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] g(x) + \left[\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] f(x_0)$

On conclut comme g continue en x_0 et f, g déri sur x_0 : $\lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$

iii) Soit $x_0 \in I$ où g ne s'annule pas sur I.

$\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ $\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) \times \frac{1}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

or g continue sur I et g dérivable sur I $\lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right)}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x_0)^2} \times g'(x_0)$

cont de g en x_0 — déri de g en x_0]

Applications : Calcul de dérivées des fonctions suivantes :

- Fonctions polynômes.
- $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}^*$ (fcts rationnelles ???)
- $\tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice :

f fonction dérivable sur I, $n \in \mathbb{N}^*$

i) Mq $(f^n)' = n f' f^{n-1}$

ii) Mq $\left(\frac{1}{f^n}\right)' = \frac{-n f'}{f^{n-1}}$

[Récurrence]

III Dérivée d'une fonction composée :

Thm : $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I

$g : J \to \mathbb{R}$ dérivable sur J, $f(I) \subset J$

$(g \circ f)$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$

Applications :

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to ax + b$ $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(ax + b)$

$(g(ax + b))' = a g'(ax + b)$

ii) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ dérivable

$g : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{x}$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

iii) $(\cos u)'(x) = -u'(x)\sin x$

$(\sin u)'(x) = u'(x)\cos x$

Exercice :

i) Si f dérivable alors f paire $\Leftrightarrow$ f' impaire.

ii) Si f est définie sur $\mathbb{R}$ de période T et dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f' est de période T.

IV Dérivée successives :

Def : Soit f dérivable sur $I \subset D_f$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On dit que f est dérivable à l'ordre n sur I s'il existe des applications $f_0, \dots, f_{n-1}$, dérivables sur I telles que $\begin{cases} f_0 = f \\ \text{et } f_{k+1} = f_k' \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\} \end{cases}$

La dérivée d'ordre n de f sur I est alors $(f_{n-1})'$ notée $f^{(n)}$.

Rq : On pose parfois $f^{(0)} = f$

et on écrit indifféremment f' ou $f^{(1)}$ et f'' ou $f^{(2)}$

Def : On dit que f est C^k ($k \in \mathbb{N}$) sur I ssi $f^{(k)}$ est définie et continue sur I. On dit f est de classe C^∞ ssi f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$

Ex : les fonctions polynômes, sinus, cosinus ...

Thm : Formule de Leibniz :

$n \in \mathbb{N}^*$, f dérivable à l'ordre n sur I

g ——————— sur I

alors (fg) est dérivable à l'ordre n sur I et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

[Démo par récurrence]

$n = 0$ et $n = 1$ sont évidents $\quad n = 1 \quad (fg)' = f'g + gf'$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que la formule est vérifiée au rang $(n-1)$

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)} = ((fg)')^{(n-1)} &= (f'g)^{(n-1)} + (fg')^{(n-1)} \\
&\underset{(HR)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k+1)} g^{(n-1-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)} g^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)} g^{(n-k)} \\
&= C_{n-1}^0 f g^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k\right) f^{(k)} g^{(n-k)} + C_{n-1}^{n-1} f^{(n)} g
\end{aligned}$$

or $C_{m-1}^{m-1} = C_m^m$ $C_{m-1}^0 = C_m^0$ et $C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k = C_m^k$

d'où le résultat. II,

f paire et dérivable $\Rightarrow f'$ impaire

$[f(-x)]'$

$f\circ g(x)$ où $g : x \mapsto -x$

$[f\circ g(x)]' = g'(x) \times f'(g(x))$

$[f(-x)]' = -f'(-x)$ car f paire

$[f(x)]' = -f'(-x)$

ie $f'(-x) = -f'(x)$

$f(x+mT) = f(x)\ \forall m \in \mathbb{Z}$

On considère $g : x \mapsto x + mT$

$f(x+mT) = f\circ g(x)$

$[f(x+mT)]' = f'(g(x)) \times \underset{1}{\underset{\shortparallel}{g'(x)}}$

$[f(x)]' = f'(x+mT)$

$f'(x) = f'(x+mT)$ ie f' T périodique

Exposé 72 : DEMONSTRATION :

Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivées d'une fonction composée. Exemples.

0_ Pré Requis

(3 déf équivalentes de la dérivée en un point)

- Dérivabilité en un point et nombre dérivé. Dérivée à gauche, à droite.
- Notion de limite et continuité.
- Si f dérivable en a alors f est continue en a.

Dérivées des fonctions usuelles :

i) $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto c \end{matrix}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ d'où le résultat

$f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{matrix}$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

$f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^m \end{matrix}$ $m \in \mathbb{N}^*$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x_0^k h^{m-k} = x_0^m + m x_0^{m-1} h + \sum_{k=0}^{m-2} x_0^k h^{m-k}$$

$$= f(x_0) + h(m x_0^{m-1}) + h \times \underbrace{h \sum_{k=0}^{m-2} x_0^k h^{m-k-2}}_{\downarrow h \to 0 \atop 0}$$

ie $f'(x_0) = m x_0^{m-1}$

$f : x \mapsto |x|$ si $x > 0$ $|x| = x$ ie $f'(x) = 1$ déjà vu.
$x < 0$ $|x| = -x$ ie $f'(x) = -1$

$f : x \mapsto \sqrt{x}$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$
$\mathbb{R}^{+*}$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \frac{\cancel{x - x_0}}{(\cancel{x - x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

ie $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$f : \begin{matrix} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{matrix}$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{x_0\} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{x x_0}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$

En admettant que la fonction sin est dérivable en 0 et $(\sin)'(0) = 1$ ie $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\forall h \neq 0 \quad \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formule trigo}}}{=} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \sin x_0 \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h}$$

or $\cos h - 1 = 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$

$$= \sin x_0 \times \frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x_0 \times \frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x_0 \times \underbrace{\sin \frac{h}{2}}_{\downarrow \, 0} \times \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2}}_{\downarrow \, 1} + \cos x_0 \times \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\downarrow \, 1}$$

d'où $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0$

<u>Démo fct composée :</u>

Soit $x_0 \in I$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ $\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{\downarrow x \to x_0 \; g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow x \to x_0 \; f'(x_0)}$

$(f^n)' = n f' f^{n-1}$

⟦ $n = 1$ vrai On suppose que la formule est vrai pour $n-1$, $n \in \mathbb{N}$.

ie $(f^{n-1})' = (n-1) f' f^{n-2}$

$$(f^n)' = (f f^{n-1})' = f' f^{n-1} + f (f^{n-1})'$$

$$= f' f^{n-1} + f (n-1) f' f^{n-2}$$

$$= f' f^{n-1} \times [n - 1 + 1] = n f' f^{n-1}$$ ⟧