Exposé 71

Dérivée en un point. Interprétation géométrique. Exemples.

0 - Pré-Requis :

- limite d'une fonction en un point, limite à gauche et à droite.
- continuité
- formule du Binôme.

Cadre : I un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$

On considère l'intervalle $J = \{h \in \mathbb{R}^* \mid x_0 + h \in I\}$

Objectif de cet exposé : préciser le lien entre la notion géométrique de tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction et la notion analytique de nombre dérivée.

I Dérivée en un point :

1) Théorème

Def : Soit $\tau_{x_0} : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $h \longrightarrow \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. τ_{x_0} est le taux d'accroissement de f au point x_0

Thm : Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\lim\limits_{h \to 0} \tau_{x_0}(h) = A \in \mathbb{R}$ $\quad h \in J$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R}$ $x \in I \setminus \{x_0\}$

iii) $\exists\, \varepsilon : J \to \mathbb{R}$, $\exists B \in \mathbb{R}$, $f(x_0+h) = f(x_0) + hB + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $h \in J$.

Rq : Si A existe alors $A = B$

[i) $\Leftrightarrow$ ii) facile.

i) $\Leftrightarrow$ iii) : On suppose que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A$ $\quad h \in J$.

$\Leftrightarrow$ Donc il existe $\varepsilon : J \to \mathbb{R}$ telle que $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - A = \varepsilon(h)$ $\forall h \in J$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

$\Leftrightarrow$ il existe $\varepsilon : J \to \mathbb{R}$ telle que $f(x_0+h) = f(x_0) + hA + h\varepsilon(h)$ $\forall h \in J$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$]

2) Nombre dérivé :

Def : Si f vérifie l'une des trois conditions, on dira que f est dérivable en $x_0 \in \mathring{I}$ de nombre dérivé $f'(x_0) = A$

$f(x_0+h) = f(x_0) + hA + h\varepsilon(h)$ est appelé développement limité de f en x_0 à l'ordre 1.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ dérivabilité en $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_0^k h^{n-k} = x_0^n + C_n^{n-1} x_0^{n-1} h + \sum_{k=0}^{n-2} x_0^k h^{n-k}$$
$$= f(x_0) + n x_0^{n-1} h + h \sum_{k=0}^{n-2} x_0^k h^{n-k-1}$$

Donc $\varepsilon(h) = \sum\limits_{k=0}^{n-2} x_0^k h^{n-k-1} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc f est dérivable en x_0 et $\boxed{f'(x_0) = n x_0^{n-1}}$

• $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$, en 0 ?
$x \longmapsto |x|$

En tout point de $\mathbb{R}^*$ on a immédiatement $f'(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 > 0 \\ -1 & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}$

Par contre f n'est pas dérivable en 0. En effet $\tau_0(h) = \frac{|h|}{h}$ sur $\mathbb{R}^*$ et admet en 0 des limites à gauche et à droite distinctes.

Thm : Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0

[iii) $f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)h + h\varepsilon(h)}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0}$ de $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0$]

3) Dérivée à droite et à gauche :

Def : Soit $I = [a, b]$, $x_0 \in I$. f est dite dérivable $\left|\begin{array}{l}\text{à droite} \\ \text{à gauche}\end{array}\right.$ en x_0 si $\tau_{x_0}(h)$ admet une limite $\left|\begin{array}{l}\text{à droite} \\ \text{à gauche}\end{array}\right.$ pour h tendant vers 0 noté $\left|\begin{array}{l}f'g(x_0) \\ f'd(x_0)\end{array}\right.$

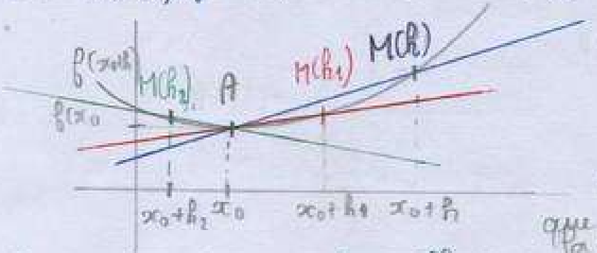
Thm : f dérivable en x_0 si et seulement si $f'd(x_0)$ et $f'g(x_0)$ existent et sont égaux.

Exemple : $x \overset{f}{\mapsto} |x|$, $f'g(0) = -1$ et $f'd(0) = 1$ donc f n'est pas dérivable en 0.

II Interprétation géométrique :

On munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentatrice de f relativement à ce repère. On suppose de plus que f est dérivable en x_0.

Soit $A(x_0, f(x_0))$ et $M_h(x_0+h, f(x_0+h))$ avec $h \in J$.



La droite $(AM(h))$ a pour coefficient directeur : $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Graphiquement on a l'impression que les sécantes tendent vers une droite limite : la tangente en A.

Def : Soit $(D_m)_m$ une famille de droite passant par un point $A \in \mathscr{P}$. On dit D_m tend vers une droite limite D si la suite des coefficients directeurs de D_m, $(a_m)_m$ tend vers a le coefficient directeur de D.

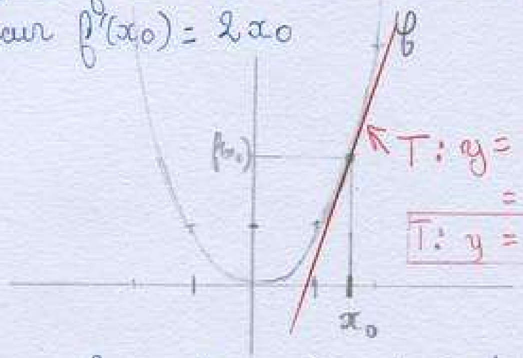
Def (analytique de la tangente) : La droite T passant par A de coefficient directeur $f'(x_0)$ est la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

$T : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Def (géométrique de la tangente). La famille de droite $(AM(h))_{h \in J}$ tend vers une droite limite T qui est la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

Rq : La suite des coefficients directeurs de $(AM(h))$ tend vers $f'(x_0)$.

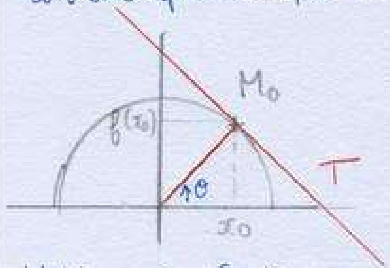
Exemple : $f : x \mapsto x^2$ admet en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ une tangente de coefficient directeur $f'(x_0) = 2x_0$



$$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$= 2x_0(x - x_0) + x_0^2$$
$$\boxed{T : y = 2x_0 x - x_0^2}$$

$f : x \mapsto |x|$. La courbe représentatrice de f admet deux demi-tangentes de coefficients directeurs distincts en l'origine : on dit que le point O est un point anguleux.

Exercice : Concordance de la notion géométrique et de la notion analytique de la tangente dans le cas du 1/2 cercle. On regarde le cas du 1/2 cercle car c'est un exemple simple dans lequel on connait la tangente en un point.



Notion géométrique :
Dans le cas du 1/2 cercle on sait que la tangente en M_0 perpendiculaire au rayon passant par M_0.

Notion analytique :

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x_0) = \frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}} \qquad x_0 = \cos\theta \qquad f(x_0) = \sin\theta$$

$$= \frac{-\cos\theta}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}$$

$$f'(x_0) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = \rho \text{ coefficient directeur de la tangente}$$

Coefficient directeur du rayon passant par M_0.

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (rayon passant par M_0 : $y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} x$

$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -1$ donc sécante $\perp$ tangente

Il y a bien concordance.

Thm : f dérivable en x_0 ssi $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont égaux.

[On suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tq

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A$$

et $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A$$

ie $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A$$ dc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = A$