Exposé 70 :

Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$, $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Applications. Calculatrices.

0- Pré Requis :

- Définition et propriétés des $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln x$.
- limites de ces trois fonctions en $+\infty$.

Intro : On a déjà vu que ces trois fonctions sont croissantes sur $]0,+\infty[$ (avec $a>0$) et leurs limites en $+\infty$ est $+\infty$. On cherche donc une "hiérarchie" de cette croissance vers $+\infty$. (On peut faire un tableau sur transparent).

I Croissance comparée

1) Relation de Comparaison :

Déf : Si f et g sont deux fonctions tq $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

f est prépondérante devant g (g négligeable devant f) si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Notation : $g << f$

Rq : Cette relation est transitive. Par abus de langage nous écrirons $f(x) << g(x)$ au lieu de $f << g$

2) Fonctions logarithmes et puissances :

Lemme : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

[$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \ln x - x$

Avec une simple étude de fct on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $f(x)<0$ ie $\ln x < x$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

c'est dire que $\ln\sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

$\frac{\ln x}{2} \leq \sqrt{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

Pour $x>1$, $\ln x \geq 0$ d'où $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (Thm des Gendarmes)]

Thm : $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $b \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty$

[$\frac{x^a}{(\ln x)^b} = \left(\frac{x^{a/b}}{\ln x}\right)^b = \left(\frac{x^{a/b}}{\frac{b}{a}(\ln x^{a/b})}\right)^b = \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{x^{a/b}}{\ln x^{a/b}}\right)$ On pose $X = x^{a/b}$

$a>0$ et $b>0$ par hypothèse

On suppose $b>0$ $\begin{cases} \text{si } b=0 \text{ lim évidente} \\ \text{ou } b<0 \end{cases}$

Donc si $x \to +\infty$ $X \to +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{a}{b}\ \frac{X}{\ln X}\right) = +\infty$]

Conséquence : $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\boxed{(\ln x)^b << x^a}$

Corollaire : $\forall b \in \mathbb{R}$, $(\ln(x))^b << P(x)$ où P est une fonction polynomiale non constante.

3) Fonctions puissances et exponentielles :

Thm : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^{+*}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^b}{x^a} = +\infty$ ie $x^a << (e^x)^b$

[$\frac{(e^x)^b}{x^a} = \frac{e^{bx}}{e^{a\ln x}} = e^{(bx - a\ln x)} = e^{x(b - a\frac{\ln x}{x})} =$

si $x > 0$
(car on regarde lim en $+\infty$)

or $\underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}_{\text{lemme}}$ dc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^b}{x^a} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{xb} = +\infty$]

Corollaire : $\forall b \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $P(x) << (e^x)^b$ où $P(x)$ est une fonction polynôme non constante.

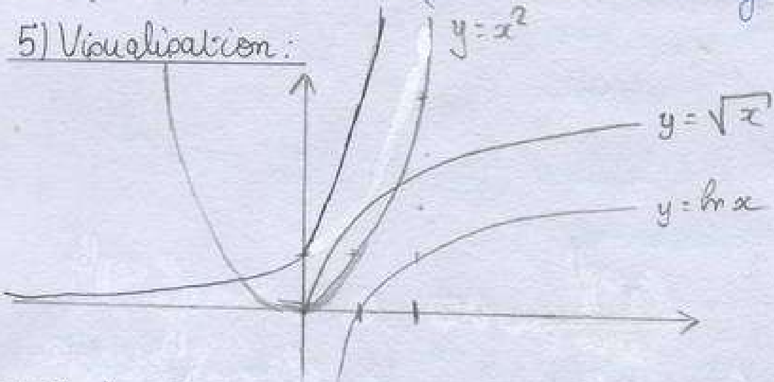
[Si $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^b}{P(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{(e^x)^b}{x^n}}_{\xrightarrow{x \to +\infty} +\infty} \times \underbrace{\frac{x^n}{P(x)}}_{\xrightarrow{x \to +\infty} \frac{1}{a_n}}$ On applique thm généraux sur limites]

4) Résumé :

Pour en revenir au problème initialement posé, pour tout triplet (a, b, c) de réels strictements positifs, les fonctions $x \mapsto (\ln x)^b$, $x \mapsto x^a$ et $(e^x)^c$ sont strictement croissantes sur $]0, +\infty[$, tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ et $(\ln x)^b << x^a << (e^x)^c$ au voisinage de $+\infty$.

5) Visualisation :



Faire un dessin en grand.
sur $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$

II Applications :

1) Avec la calculatrice :

Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow (\ln x)^5 x^5 e^{-x}$

1) Tracer f sur $x \in [0, 6]$. Que peut on suppose ?

2) Refaire le tracé sur $[0, 50]$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Calcul de limites :

Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^x = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{x \ln x}$

On pose $X = \frac{1}{x}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} e^{\frac{\ln 1/X}{X}}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-\frac{\ln X}{X}} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 - \ln x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 - \ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0} - \underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{0}\right) = +\infty$

3) $\ln x$ n'est pas une fonction rationnelle :

$\ln x = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q des fonctions polynômes (On raisonne par l'absurde)

$P(x) = a_p x^p + \cdots + a_0$ avec $a_p \neq 0$ et $a_i \in \mathbb{R}$

$Q(x) = b_q x^q + \cdots + b_0$ avec $b_q \neq 0$ et $b_i \in \mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Donc $p > q$ $p - q > 0$ et alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{p-q}} = 0$ (Thm vu $\ln x << x^a$ avec $a > 0$)

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{p-q}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{x^{p-q} Q(x)} = \frac{a_p}{b_q} \neq 0$ ↯ ABSURDE