Cet exposé est à rattacher à celui de la fct logarithme qui est primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et l'expo def à partir du logarithme

Exposé 69 : Fonctions exponentielles

0- Pré Requis :

- Fonctions logarithmes et fonctions puissances.
- Notions de limite, de continuité et de dérivabilité.
- Thm d'existence d'une bijection réciproque pour une application continue et strictement monotone sur un intervalle et propriétés de cette réciproque.
- Fct logarithme en base a $(a>0)$

I Définition de la fonction exponentielle :

1) Définition :

Déf. On appelle fonction exponentielle la bijection réciproque de la fonction $\ln$. On la note $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$
$x \longrightarrow \exp(x)$

2) Conséquences :

Prop : . La fonction exponentielle est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$

. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^{*+}$ $\quad y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y$

. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\ln(\exp(x)) = x$

. de $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ on en déduit que $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$

3) Propriétés fondamentales :

Prop : $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\exp(a) \times \exp(b) = \exp(a+b)$

[Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\begin{cases} \exp(a) = \alpha \\ \exp(b) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ln \alpha \\ b = \ln \beta \end{cases}$

$$\exp(a+b) = \exp(\ln\alpha + \ln\beta) = \exp(\ln(\alpha\beta)) = \alpha\beta = \exp(a) \times \exp(b)$$

Prop : . $\forall a \in \mathbb{R}, \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

. $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall p \in \mathbb{Q}$, $(\exp(a))^p = \exp(pa)$

[Propriétés du logarithme]

4) Changement de notation :

On a vu que $\exp(1) = e$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Q}$ $(\exp x)^p = \exp(xp)$
donc $\exp(p) = \exp(p \cdot 1) = (\exp 1)^p = e^p$ $\quad \forall p \in \mathbb{Q}$
Donc les fonctions $\exp$ et e coïncident sur l'ensemble des rationnels.
On décide de prolonger à $\mathbb{R}$ ce résultat. ie $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) = e^x$

Par la suite on pose $\exp(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

L'avantage est que les formules vérifiées par $\exp$ deviennent les formules standards des fonctions puissances.

II - Etude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité et continuité :

<u>Prop</u>: La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $(\exp)'(x) = \exp x$

$f(x_0) = y_0$
f strict monotone dérivable et $f'(x_0) \neq 0$ alors
f^{-1} déri en y_0
et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

[Montrer que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$

Mq $\exists a \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = a$

or $\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \left[\frac{\exp(h) - 1}{h} \right]$

$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}$? On sait que $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ ie $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$

On pose $\phi : x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$ $\quad \phi \circ \exp(h) = \frac{\exp(h) - 1}{h}$

Donc Thm composition limite : $\exp(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 1$ et $\phi(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 1$ ie $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1}$

ie $\lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$]

<u>Rq</u>: On en déduit que la fonction exponentielle est C^{∞} et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exp^{(n)}(x) = \exp x$

<u>Prop</u>: Si $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I alors $f : x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$ $f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

[Thm de dérivation des fcts composées].

2) Limites :

<u>Prop</u>: i) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ donc l'axe des abcisses est asymptote à la courbe représentative de exp.

ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ de le graphe de la fct exp admet pour direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées

iii) $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

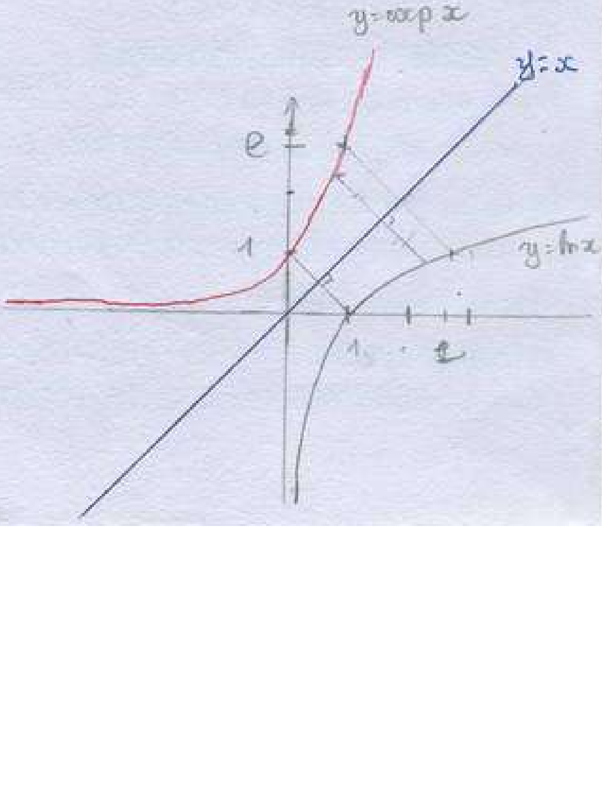
iv) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

3) Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0	$\nearrow$		$+\infty$

4) Représentation graphique :

<u>Prop</u>: La courbe représentative de la fct exponentielle est la symétrique de celle de $\ln$ par rapport à la droite $y = x$



III Fonction exponentielle en base a (a > 0)

1) Définition :

Déf : On appelle fonction exponentielle de base a notée exp_a la fonction réciproque de $\log_a$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ (avec a > 0)

Conséquence : $exp_a x = e^{x \ln a}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ Rappel $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $a > 0$

Rq : Si $a = 1$ exp_1 est la fonction constante égale à 1

Si $a = e$ exp_e ———— exp étudiée dans la partie précédente.

2) Propriétés :

Prop : $\forall x, x' \in \mathbb{R}$; $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$ i) $exp_a(x) \times exp(x') = exp_a(x + x')$

ii) $exp_a(x - x') = \frac{exp_a(x)}{exp_a(x')}$

iii) $\forall p \in \mathbb{Q}$ $(exp_a(x))^p = exp_a(xp)$

3) Dérivabilité :

Prop : $x \mapsto exp_a x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(exp_a)'(x) = \ln a \, exp_a(x)$

4) Notation :

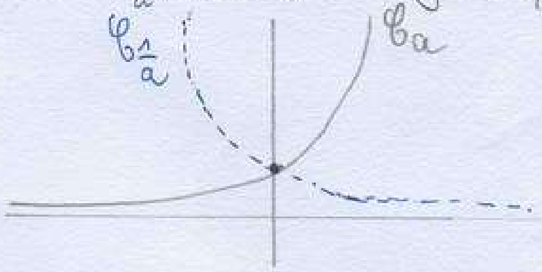
On a $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$ $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

5) Représentation graphique :

Prop : Si $a > 1$ exp_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Si $0 < a < 1$ $exp\ a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Prop : $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_{\frac{1}{a}}$ (avec a > 0) sont symétriques par rapport à (Oy) (où $\mathcal{C}_a$ courbe représentative de exp_a)



IV Applications :

1) Etudes de suites : n^n et $n!$ (Voir leçon logarithme)

2) Equations différentielles du 1ère ordre :

$y' + ay = 0$.

Exposé 69 Démonstrations.
Fonctions exponentielles

0_ Pré-requis :
- Tout sur la fonction logarithme et sur les fonctions puissances.
- Limites et dérivées de fonctions composées
- fonction réciproque.

I Définition de la fonction exponentielle :

1) Définition :

Déf : On appelle fonction exponentielle la bijection réciproque de la fonction ln. On la note : $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$
$x \longrightarrow \exp^x$

2) Conséquences

- La fonction exponentielle est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}^{*+}$ $y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\ln(\exp(x)) = x$
- de $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$, on en déduit que $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$

3) Propriétés fondamentales :

Prop : $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\exp(a) \times \exp(b) = \exp(a+b)$

[$\forall a, b \in \mathbb{R}$ on pose $\begin{cases} \exp(a) = \alpha \\ \exp(b) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ln \alpha \\ b = \ln \beta \end{cases}$

$\ln \alpha + \ln \beta = \ln \alpha\beta = a + b \Leftrightarrow \exp(a+b) = \alpha\beta = \exp(a) \times \exp(b)$]

Prop : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}$, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, et $\forall p \in \mathbb{Q}$, $(\exp(a))^p = \exp(pa)$

[$\forall a \in \mathbb{R}$ $\exp(a)\exp(-a) = \exp(a-a) = \exp(0) = 1$ d'où $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp a}$

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\exp(a-b) = \exp(a+(-b)) = \exp(a)\exp(-b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$
- $\forall (a,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $\ln(\exp a)^p = p \ln(\exp a) = pa$
$\Leftrightarrow (\exp a)^p = \exp(pa)$]

4) Changement de notation :

On a vu que $\exp(1) = e$

et $\forall (x,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ on a $(\exp x)^p = \exp(xp)$

donc $\exp(p) = \exp(p\cdot 1) = (\exp 1)^p = e^p$

Donc les fonctions exp et e coïncident sur l'ensemble des rationnels.

On décide de prolonger à $\mathbb{R}$ ce résultat, c'est dire que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp x = e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$ on sait que $x^{m+p} = x^m . x^p$

Pour $x = e$ on a $e^{a+b} = e^a e^b$

Les formules vérifiées par exp deviennent les formules standards des fonctions puissances

Pour la suite, on pose $\exp x = e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

II Etude de la fonction exponentielle de base e

1) Dérivabilité et continuité

Prop: La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\exp)'(x) = \exp x$.

[Montrons que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$; soit $x \in \mathbb{R}$

Mq $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\exp^{x+h} - \exp^{x}}{h} = a$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\exp^{(x+h)} - \exp^{x}}{h} = \exp(x)\left[\frac{\exp(h)-1}{h}\right]$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} \,?$$

On sait que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ on a donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x} = 1$

$\exp : h \longrightarrow \exp(h)$

et $\phi : x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$ $\qquad \phi \circ \exp(h) = \dfrac{\exp(h)-1}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0} \exp(h) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \phi(x) = 1$ donc $\lim\limits_{h\to 1}\left[\dfrac{\exp h - 1}{h}\right] = 1$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$ d'où le résultat]

Rq: La fonction exp est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Prop : Si $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I alors $x \mapsto f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

[Théorème de dérivation des fonctions composées]

2) Limites :

Prop : i) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ donc l'axe des abscisses est asymptote.

ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ dont le graphe de la fonction exp admet pour direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées mais pas d'asymptotes.

iii) $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

iv) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

[i) On veut mq $\forall M > 0\ \exists N > 0$, $x \geq N \Rightarrow f(x) \geq M$

Soit $M > 0$, soit $N \in \mathbb{R}$ tq $N > \ln M$

donc si $x > N$ alors $x > \ln M$

$\exp x > M$ car exp est une fct strict croissante.

dc $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

et $\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0^+$

ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$? $\frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{e^{\ln x}} = e^{x - \ln x}$ or $\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}\right) = +\infty$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

iii) $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$?

$\forall x < 0$, $xe^x = -e^{\ln(-x)} e^x = -e^{\ln(-x) + x}$ or $\lim_{x \to -\infty} \ln(-x) + x = -\infty$

Donc $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

iv) $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$,

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = (\exp)'(0) = \exp(0) = 1$

3) Tableau de variation

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(\exp)'(x)$		+		
$\exp(x)$	0^+ ↗	1	e	↗ $+\infty$

De tout ce qui précède on déduit le tableau suivant.

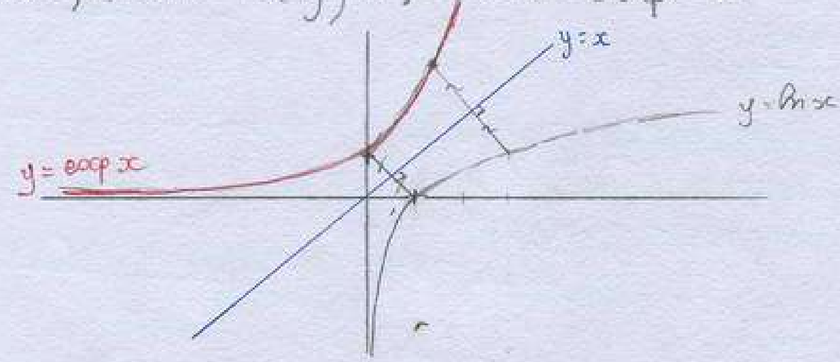
4) Représentation graphique :

Prop: La courbe représentatrice de la fonction exponentielle est la symétrique de la courbe représentatrice de $\ln$ par rapport à la droite $y=x$.

[$M(x, \ln x) \in \mathcal{C}_{\ln}$ $\quad y = \ln x \iff x = e^y$

Soit N le symétrique de M par rapport à $\Delta : y = x$

$N(\ln x, x)$ donc $N(y, e^y)$ donc $N \in \mathcal{C}_{\exp}$]



III Fonction exponentielle de base a $(a>0)$

1) Définition :

Déf: On appelle fonction exponentielle de base a notée $\exp_a x$ la fonction réciproque de $\log_a$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$

Conséquence: $\exp_a x = e^{x \ln a}$

[Soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$, soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = y \iff \ln x = y \ln a$

$\iff \boxed{x = \exp(y \ln a)}$]

Remarque :

pour $a=1$ $\exp_1$ est la fonction constante $x \mapsto 1$

pour $a=e$ $\exp_e$ est la fonction exp de base e étudiée précédemment $x \mapsto e^x$

2) Propriétés :

On a les même propriété que pour l'exponentielle en base e.

Prop : $\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2$, $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$

i) $\exp_a(x) \cdot \exp_a(x') = \exp_a(x+x')$

ii) $\exp_a(x-x') = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_a(x')}$

iii) $\forall p \in \mathbb{Q}$ $(\exp_a(x))^p = \exp_a(px)$

[directe car $\exp_a(x) = e^{x \ln a}$]

3) Dérivabilité :

Prop : $x \mapsto \exp_a x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $(\exp_a)'(x) = \ln a \exp_a x$

[Dérivation des fonctions composées]

4) Notation :

On a $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$

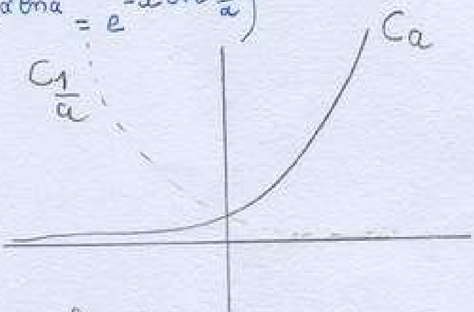
5) Représentation graphique :

Si $a > 1$ $\ln a > 0$, $e^{x \ln a} = \exp_a(x) = a^x$ est strictement croissante

Si $0 < a < 1$ $\ln a < 0$, $e^{x \ln a} = \cdots = a^x$ est strictement décroissante

$\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_{\frac{1}{a}}$ (avec $a > 0$) sont symétriques par rapport à (Oy)

$(e^{x \ln a} = e^{-x \ln \frac{1}{a}})$



IV Applications :

1) Etude de la suite $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

A partir d'un certain rang N tq $N > x$ alors $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$ et donc

$1 + \frac{x}{n} > 0$ $\forall n > N$ et donc $\forall n > N$ $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp n \underbrace{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}_{\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x}{n}}$

$= \exp x$