Exposé 68 :

Fonctions logarithmes :

Intro: Au XVI siècle devant la complexité croissante des calculs liés à l'astronomie, à la physique ... les chercheurs ont cherché à transformer une multiplication en addition. C'est ainsi que le mathématicien Neper a mis au point la première table de logarithme.

0- Pré-Requis:

- Notions de limites, continuité et dérivabilité.
- limites de fcts composées.
- primitive (en particulier toute fct continue sur un intervalle réel non vide non réduit à un point admet des primitives.

I Fonction logarithme népérien:

Déf: On appelle fonction logarithme népérien la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1. Cette fonction est notée ln.

Propriétés: i) la fonction ln est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} (\ln x)' = \frac{1}{x}$

ii) la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

iii) le signe de $\ln x$ est fourni par le sens de variation de ln:

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$
$$\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

[i) déf de ln ii) $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ iii) $\ln(1) = 0$ et ln ↗ sur $\mathbb{R}^{+*}$]

II Propriétés algébriques:

Prop (Fondamentale): $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{+*2} \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$.

[Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \to \ln(ax)\end{array}$ et $g(x) = ax$

f dérivable comme produit de fcts dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} \ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \ f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \ln x + k \quad k \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

Si $x = 1$ $\ln a = \ln 1 + k$ dc $k = \ln a$]

Corollaire:
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{+*2}, \forall p \in \mathbb{Z}$

i) $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

ii) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

iii) $\ln(a^p) = p \ln a$

iv) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

[i) ii) et iv) découle de la propriété fondamentale.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $f(x) = \ln(x^p)$ et $g(x) = x^p$ et $h(x) = \ln x$ ie $f = h \circ g$

$\underset{\text{dérivée composition}}{\Longrightarrow} f'(x) = \frac{p x^{p-1}}{x^p} = \frac{p}{x} \Longrightarrow \underset{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}}{f(x) = p \ln x + k} \quad k \in \mathbb{R} \underset{x=1}{\Longrightarrow} k = 0$]

Corollaire 2 : $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall r \in \mathbb{Q}$ on a $\ln(a^r) = r \ln a$

Rq : Nous supposons connue l'élévation à une puissance rationnelle, mais pas la fonction exponentielle. ie $\ln(a^x) = x\ln a$ $x \in \mathbb{R}$

III Étude de la fonction logarithme :

1) Limites aux bornes de $]0,+\infty[$

Thm : i) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et ii) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$

[i) On veut mq $\forall A>0\ \exists \alpha_A>0$ tq $x>\alpha_A \Rightarrow \ln x > A$

$\ln 2 > 0$, Soit $A>0$.

$\ln 2^m = m\ln 2 \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$ donc $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $\ln 2^N > A$

Donc si $x > 2^N = \alpha_A$ alors $\ln x > \ln 2^N > A$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

car ln strict croissante

ii) On a $\forall x>0$ $\ln x = -\ln\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow -\ln x = \ln \frac{1}{x}$ d'où le résultat]

2) Le nombre e et quelques limites :

On a vu que la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus avec les deux limites précédentes, on en déduit que ln est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$ ce qui donne un sens à la définition suivante :

Def : L'unique réel strictement positif dont le logarithme népérien est égal à 1 est noté e.

Prop : i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

ii) $\lim_{\substack{x\to 0\\ >0}} x\ln x = 0$

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

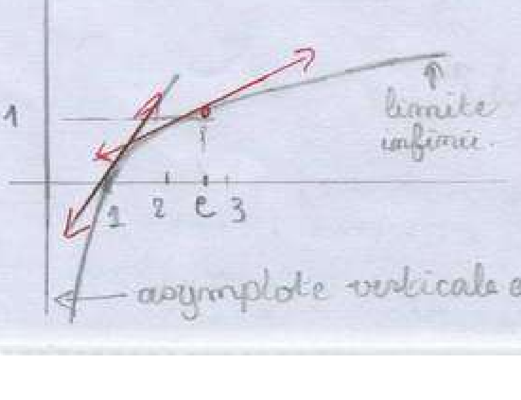
iv) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Rq : Pour mq. $2 < e < 3$ il suffit de mq $\ln 2 < 1$ et $\ln 3 > 1$

$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$

$\ln 2 <$ Aire du trapèze et $\ln 3 >$ Aire du trapèze formé par la tangente pour le pt médian

3) Représentation graphique.



Rappel : Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentatrice de ln.

Équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

où $f(x) = \ln x$

ie $y = \frac{1}{x_0}(x-x_0) + \ln x_0$

Donc en $x_0 = 1$, la tangente : $y = x-1$

$x_0 = e$, ——— : $y = \frac{x}{e}$

Prop : La courbe $\mathcal{C}$ représentative de ln est tjs en dessous de ses tangentes.

VI Fonctions logarithmes en base a

[simple étude de fonction] ($\ln x$ - eq tan)

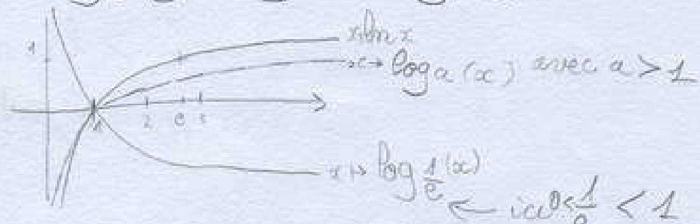
Déf : Soit $a \in \mathbb{R}^{*+} \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$

est appelée fonction logarithme en base a. Si $a = 10$, on la note encore log et on l'appelle fonction logarithme décimal.

Propriété : i) $x \mapsto \log_a x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $\dfrac{1}{x \ln a}$

ii) $\log_a x$ est croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$

iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^{*+}$ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$



VII Applications :

1) Recherches de primitives, avant de connaître la fonction logarithme. on ne savait pas calculer les primitives :

$x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ → primitive $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$, $c \in \mathbb{R}$

$x \mapsto \tan x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ → primitive $-\ln(\cos x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

2) Comparaison de certaines suites :

$n!$ et n^n

$[\ \ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k$ et $\ln n^n = \ln(\exp n \ln n) = n \ln n\ ]$

3) Comparaison moyenne arithmétique et géométrique

ie Mq $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < \dfrac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$

en utilisant la concavité de ln.

Comparer $(a_1 \cdots a_n)^{1/n}$? $\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$

inégalité de Jensen : fct convexe : $f(\sum_{i=1}^{n} d_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i f(x_i)$ avec $\sum_{i=1}^{n} d_i = 1$

- concave : $f(\sum_{i=1}^{n} d_i x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} d_i f(x_i)$

ln concave : $\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{n}\right)\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(a_i)$ ie $\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$?

i) Étude des variations de $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x - \ln x$

($g : x \mapsto x - \ln x$
$g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

ie $x \geq \ln x \ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \ln x \leq x$

On en déduit que $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

On en déduit que $\forall x \in [1, +\infty[\quad 0 \leq \ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$

$$0 \leq \frac{\ln \sqrt{x}}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x}$$

car $\ln x^{1/2} = \frac{1}{2} \ln x$

$$0 \leq \frac{\ln x}{2x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \text{Thm gendarmes}$$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$?

On pose $X = \frac{1}{x}$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = - \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} \underset{\text{d'après i)}}{=} 0$

iii) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

↑ Nombre dérivée de ln en 1

iv) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

On pose $X = x + 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{X \to 1} \frac{\ln X}{X - 1} \underset{\text{iii)}}{=} 1$$

Prop : La courbe représentative de ln est tjs au dessous de ces tangentes.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ équation de la tangente en x_0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0$$

On étudie le signe de $g : x \mapsto \frac{x - x_0}{x_0} + \ln x_0 - \ln x$

$$g(x) = \frac{x - x_0}{x_0} + \ln \frac{x_0}{x} \qquad g'(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$$

x	0		x_0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	↗	0	↘	

D'où le résultat !!!!

Autre méthode : mq f concave ie $-f'$ strict croissante ($-f' = -\frac{1}{x}$ ↗)

ou $-f'' > 0 \quad -f''(x) > 0$ car $f''(x) = \frac{1}{x^2}$