Exposé 67 :

Fonctions Polynômes :

0. Pré-Requis :

- Les fcts puissances, $x \mapsto x^m$, $m \in \mathbb{N}$
- Récurrence.

On considère le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Généralités sur les fonctions polynômes :

1) Définition :

Déf : Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. On dit que f est une fonction polynôme sur $\mathbb{K}$ s'il existe un entier m et un $(m+1)$ uplets $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ tq $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $\forall x \in \mathbb{K}$

$\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ est appelée écriture polynomiale de f.

Exemples : Les fonctions constantes, affines et puissances sont des fonctions polynômes.

2) Propriété fondamentale :

Thm : Soit $(a_0, a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$. $\forall x \in \mathbb{K}, \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = 0 \iff a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0$

[$\Leftarrow$ évident

$\Rightarrow$ Par récurrence.

. $\mathcal{P}(m)$: " $\forall x \in \mathbb{K}, \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0$

. Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(m-1)$ est vraie.

Soit $(a_0, a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ tq $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}$

$f(2x) = \sum_{k=0}^{m} a_k (2x)^k = 0$

et $2^m f(x) = 0$ d'où $2^m f(x) - f(2x) = 0$

$$2^m \left(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k \right) - \sum_{k=0}^{m} a_k (2x)^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} 2^m a_k x^k - \sum_{k=0}^{m-1} 2^k a_k x^k = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{m-1} (2^m - 2^k) a_k x^k = 0$$

On a donc par hypothèse de récurrence $(2^m - 2^k) a_k = 0 \quad \forall k \in [\![0, m-1]\!]$

$\Rightarrow a_k = 0 \ \forall k \in [\![0, m-1]\!]$ car $2^m \neq 2^k \ \forall k \in [\![0, m-1]\!]$

d'où $a_m x^m = 0 \ \forall x \in \mathbb{K} \Rightarrow a_m = 0$. Donc $P(m)$ est vérifiée.]

3) Unicité de l'écriture polynomiale :

Thm : Soit f une fonction polynome non nulle. Alors il existe un unique $m \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ avec $a_m \neq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{K}, f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$

[Raisonnement par l'absurde. On dit qu'il y en a deux, on les soustrait et avec le thm précédent on conclut]

Def: Dans le théorème précédent, n est appelé degré de la fonction polynôme f, on note $\deg f = n$
Si $f \equiv 0$ alors $\deg f = -\infty$

Rq: C'est une convention $-\infty$ pour la formule du degré du produit.

II Opérations sur les fonctions polynômes:

Soit f et g deux fonctions polynômes. On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $a_m \neq 0$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k$, $b_p \neq 0$.

1) Somme:

Prop: $(f+g)$ est une fonction polynôme et $\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g)$ de plus si $\deg f \neq \deg g$ alors $\deg(f+g) = \max(\deg f, \deg g)$.
[évident suffit de l'écrire]

2) Produit:

Prop: $(f.g)$ est une fonction polynôme et $\deg(fg) = \deg f + \deg g$

Rq: $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, (λf) est une fonction polynôme et $\deg(\lambda f) = \deg f$

3) Composée:

Prop: $f \circ g$ est une fonction polynôme et $\deg(f \circ g) = \deg f \times \deg g$

[$f \circ g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\sum_{p=0}^{p} b_p x^p \right)^k$ de fct poly et terme de plus haut degré: $a_m b_p$ qui est le coeff de x^{mp}]

4) Polynômes à degrés échelonnés:

Prop: Soit n un entier. Soit f une fonction polynôme de degré n. $\forall 0 \leq k \leq n$, f_k est une fonction polynôme de degré k. Alors il existe $(a_0, \dots, a_n)$ unique tq $f = a_0 f_0 + \dots + a_n f_n$ avec $a_n \neq 0$.

[Mq $(f_0, \dots, f_n)$ base de $\mathbb{K}_n[X]$, $\alpha_0 f_0 + \dots + \alpha_n f_n = 0$ ie $\underbrace{\alpha_n f_n}_{\deg = n} = \underbrace{\alpha_0 f_0 + \dots + \alpha_{n-1} f_{n-1}}_{\deg \leq n-1}$ ABSURDE
ie $\alpha_n = 0$ ....]

III Propriétés différentielles:

Prop: $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, alors $f \in C^\infty(\mathbb{K})$ et l'on a $f'(x) = \sum_{k=1}^{m} k a_k x^{k-1}$

Prop: (Formule de Taylor). Soit $x_0 \in \mathbb{K}$, f une fonction polynôme de degré m. Alors on a $f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

[Il suffit d'appliquer le thm des poly à degrés échelonnés à la famille $\{f_0, \dots, f_m\}$ où $f_j = (x - x_0)^j$, ie $f(x) = \alpha_0 f_0 + \dots + \alpha_m f_m$
On dérive à l'ordre k et on obtient α_k ...]

IV Divisibilité et racines :

Soit f une fonction polynôme de degré n.

Def : Soit g une fonction polynôme.

- f est divisible par g ssi il existe une fonction polynôme h tq $f = gh$
- On dit que $a \in \mathbb{K}$ est racine de f ssi $f(a) = 0$.

Thm : Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, α est racine de f ssi il existe une fonction polynôme h tq $f(x) = (x-\alpha)h(x)$.

Thm : Soit $a \in \mathbb{K}$, et $k \geq 1$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\exists g$ fonction polynôme tq $f(x) = (x-a)^k g(x)$ $\forall x \in \mathbb{K}$ et $g(a) \neq 0$

ii) $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$ et $f^{(k)}(a) \neq 0$

On dit alors que a est racine de f d'ordre k.

Thm : Soit f une fonction polynôme de degré n. ($f \not\equiv 0$)

f admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$. Si f admet n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ alors $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$

[Les 2 premiers thms se montrent avec la formule de Taylor.
Le troisième par l'absurde.]

Application :

Montrer que si f est une fonction polynôme de degré n à n racines distinctes, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ alors f' admet $n-1$ racines distinctes $b_1 < b_2 < \dots < b_{n-1}$ tq $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n$

[$(n-1)$ fois Rolle]

Exposé 67
Fonctions Polynômes

0. Pré-requis :

- les fonctions puissances $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$
- récurrence.

On considère le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I - Généralités sur les fonctions polynômes :

1) Définition :

Def : Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. On dit que f est une fonction polynôme sur $\mathbb{K}$ s'il existe un entier n et un $(n+1)$ uplets $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tq :

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $\forall x \in \mathbb{K}$

$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est appelée écriture polynomiale de f.

Exemple : Les fonctions constantes, affines et puissances sont des fonctions polynômes.

2) Propriété fondamentale :

Thm : ~~Soit $(a_k)_{k=0}^{n} \in \mathbb{K}^{n+1}$~~ Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$\forall x \in \mathbb{K}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \iff a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$

[I] $\Leftarrow$ Evident.

$\Rightarrow$ Par récurrence :

- $\mathcal{P}(n)$: " $\forall x \in \mathbb{K}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$
- $P(0)$ est vraie
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie.

Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tq $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}$

$f(2x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (2x)^k = 0$

et $2^n f(x) = 0$ d'où $2^n f(x) - f(2x) = 0$

$$2^n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) - \sum_{k=0}^{n} a_k (2x)^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^n a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_k x^k = 0 \iff \sum_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) a_k x^k = 0$$

On a donc hypothèse de récurrence : $(2^n - 2^k) a_k = 0 \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!]$

$\Rightarrow \boxed{a_k = 0 \ \forall k \in [\![0, n-1]\!]}$ car $2^n \neq 2^k \ \forall k \in [\![0, n-1]\!]$

d'où $a_m x^m \underset{\forall x \in \mathbb{K}}{=} 0 \Rightarrow a_m = 0$ Donc $P(m)$ est vérifiée]

3) Unicité de l'écriture polynomiale :

Thm : Soit f une fonction polynôme non nulle. Alors il existe un unique $m \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ avec $a_m \neq 0$ tels que

$\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$

[Soit f non nulle.

On suppose $\exists m \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ $a_m \neq 0$

$\exists p \in \mathbb{N}, (b_0, \dots, b_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ $b_p \neq 0$

tq $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$

$\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_p x^p$

On suppose par exemple $m \geq p$

donc $\forall x \in \mathbb{K}$, $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_p - b_p)x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \dots + a_m x^m$

D'après le théorème précédent on a : $\forall 0 \leq k \leq p$ $a_k - b_k = 0 \Leftrightarrow a_k = b_k$

$\forall k > p$ $a_k = 0$

On a donc l'unicité de l'écriture polynomiale.]

Def : Dans le théorème précédent, m est appelé degré de la fonction polynôme f, on note $\deg f = m$

Si $f \equiv 0$ alors $\deg f = -\infty$

Rq : c'est une convention $-\infty$ pour la formule du degré du produit.

II Opérations sur les fonctions polynômes

Soit f et g deux fonctions polynômes. On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $a_m \neq 0$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k$, $b_p \neq 0$.

1) Somme.

Prop : $(f+g)$ est une fonction polynôme et $\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g)$

de plus si $\deg f \neq \deg g$ $\deg(f+g) = \max(\deg f, \deg g)$

[On suppose $p \leq m$

$\forall x \in \mathbb{K}$, $(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k)x^k + \sum_{k=p+1}^{m} a_k x^k$

d'où le résultat]

2) Produit :

Prop : $(f.g)$ est une fonction polynôme et $\deg(fg) = \deg f + \deg g$

[$\forall x \in \mathbb{K}\ (f.g)(x) = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right)$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{p} a_k b_p x^{k+p}$$

donc $(f.g)(x) = \sum_{k=0}^{m+p} c_k x^k$ car $a_m \neq 0$ et $b_p \neq 0$ donc $c_{m+p} = a_m b_p \neq 0$.

donc $\deg(f.g) = p+m = \deg f + \deg g$]

Rq : $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, (λf) est une fonction polynôme et $\deg(\lambda f) = \deg f$.

3) Composée :

Prop : $f \circ g$ est une fonction polynôme et $\deg(f \circ g) = \deg(f) \times \deg(g)$

[$f \circ g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k (g(x))^k = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\sum_{p=0}^{p} b_p x^p\right)^k$

$\Rightarrow$ donc $f \circ g$ est une fonction polynôme et de plus le terme de plus au degré a pour coefficient : $a_m b_p^m$ (coefficient de x^{mp})]

4) Polynômes à degrés échelonnés.

Prop : Soit n un entier. Soit f une fonction polynôme de degré m.
$\forall 0 \leq k \leq m$, f_k est une fonction polynôme de degré k.
Alors il existe $(a_0, a_1, \dots, a_m)$ unique tq $f = a_0 f_0 + \dots + a_m f_m$ avec $a_m \neq 0$.

[Pour cela on va montrer que $\{f_0, \dots, f_m\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$
ensemble fonctions polynomes de degré ≤ n

Pour cela Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ tq $\alpha_0 f_0 + \dots + \alpha_m f_m = 0$

On a donc $-\alpha_m f_m = \alpha_0 f_0 + \dots + \alpha_{m-1} f_{m-1}$

Si $\alpha_m \neq 0$ alors $-\alpha_m f_m$ est un polynôme de degré n
et $\alpha_0 f_0 + \dots + \alpha_{m-1} f_{m-1}$ est un polynôme de degré $\leq m-1$
Absurde donc $\alpha_m = 0$

Et ainsi de suite ...
Donc $\{f_0, \dots, f_m\}$ famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$ or $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n$
Donc $\{f_0, \dots, f_m\}$ base de $\mathbb{K}_n[X]$, donc on a le théorème ...]

III Propriétés différentielles :

1) Proposition :

Prop : $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, alors $f \in C^\infty(\mathbb{K})$ et l'on a $f'(x) = \sum_{k=1}^{m} k a_k x^{k-1}$

[$\forall k \in \mathbb{N}$, $g_k : x \longmapsto x^k$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{K})$
donc f est $C^\infty(\mathbb{K})$ comme somme de fonctions $C^\infty(\mathbb{K})$
et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $(a_k g_k)'(x) = k a_k x^{k-1}$ et $g_0'(x) = 0$
Donc $f'(x) = \sum_{k=1}^{m} k a_k x^{k-1}$]

2) Formule de Taylor

Prop : Soit $x_0 \in \mathbb{K}$, f une fonction polynôme de degré m. Alors on a
$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

[D'après le théorème des polynômes à degré échelonnés.
$(x-x_0)^k$ étant un polynôme de degré k $(0 \leq k \leq m)$ on a :
il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ tq
$$f(x) = \alpha_m (x-x_0)^m + \alpha_{m-1}(x-x_0)^{m-1} + \dots + \alpha_0$$
On dérive à l'ordre k et on obtient
$$f^{(k)}(x) = k!\,\alpha_k + (x-x_0)g(x) \text{ avec } g \text{ fct polynôme.}$$
$$f^{(k)}(x_0) = k!\,\alpha_k$$
ie $\forall k \in [\![0, m]\!]$ $\alpha_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$
Donc $f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$]

IV Divisibilité et racines :

Soit f une fonction polynôme de degré m.

1) Définition :

Def : Soit g une fonction polynôme
- f est divisible par g ssi il existe h fonction polynôme tq $f = gh$
- On dit que $a \in \mathbb{K}$ est racine de f ssi $f(a) = 0$.

Thm : Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, α est racine de f ssi il existe une fonction polynôme h tq $f(x) = (x-\alpha)h(x)$

2) Théorème et définition :

Thm : Soit $a \in \mathbb{K}$, et $k \geq 1$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\exists g$ fonction polynôme tq $f(x) = (x-a)^k g(x)$ $\forall x \in \mathbb{K}$ et $g(a) \neq 0$

ii) $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$ et $f^{(k)}(a) \neq 0$

On dit alors que a est racine de f d'ordre k.

[Retour sur la démo du thm précédent

On suppose que α est racine de f ie $f(\alpha) = 0$

On applique la formule de Taylor à f :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + (x-\alpha)\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^{k-1}\right]$$

Donc $(x-\alpha)$ divise f.

Démo du thm, tjs d'après Taylor :

ii) $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$

car $f(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$

Donc $f(x) = (x-a)^k \times g(x)$

où $g(x) = \sum_{j=k}^{m} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j-k}$ donc g est une fonction polynôme

$$g(a) = \underbrace{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}}_{\neq 0} + \underbrace{(a-a)\frac{f^{(k+1)}}{(k+1)!} + \dots + (a-a)^{m-k}\frac{f^{(m)}(a)}{m!}}_{=0}$$

Donc $g(a) \neq 0$.

i) $\Rightarrow$ ii) Calcul...]

Thm : Soit f une fonction polynôme de degré m. $(f \neq 0)$

f admet au plus m racines dans $\mathbb{K}$

si f admet m racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ alors

$\forall x \in \mathbb{K}$ $f(x) = \lambda(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_m)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$

[Si f admet k racines avec k racines avec $k > m$, alors il existe g fonction polynôme tq

$f(x) = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_k)g(x)$

$\forall i \in [\![1, k]\!]$ $(x-\alpha_i)$ est de degré 1 donc $f(x)$ est de degré au moins $k > m$

d'où la contradiction.

si f admet n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ alors
il existe g fonction polynôme tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)\, g(x)$
$\Rightarrow \deg = 0 \Rightarrow g(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$. $\mathbb{I}$

Application:

Montrer que si f est une fct polynôme de degré n à n racines distinctes $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ alors f' admet $n-1$ racines distinctes $b_1 < b_2 < \dots < b_{n-1}$ tq $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n$

$\mathbb{I}$ Thm précédent plus n fois le thm de Rolle ou ...