Exposé 66 :

Méthodes d'approximation d'une solution d'une équation numérique réelle. Exemples. Calculatrice.

0 - Pré-Requis :

- suites réelles (convergence, suites récurrentes, adjacentes ...)
- fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: continuité, dérivabilité, convexité, TVI
- Théorème du point fixe
- Principe de Récurrence.

Cadre : Dans cet exposé, on considère $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ où f strictement monotone, continue et qui change de signe sur $[a,b]$. Ce qui assure l'existence et l'unicité de $\alpha \in [a,b]$ tq $f(\alpha) = 0$

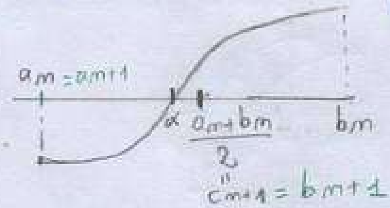
Existence : TVI, unicité : strict monotonie et continuité.

I Méthode de Dichotomie

1) Principe :

On définit deux suites (a_n) et (b_n), $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $a_0 = a$, $b_0 = b$

si $f(c_{n+1}) f(a_n) < 0$ alors $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_{n+1} \end{cases}$ sinon $\begin{cases} a_{n+1} = c_{n+1} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$



Ici $f(c_{n+1}) f(a_n) < 0$

$\Rightarrow a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_{n+1}$

2) Convergence :

Thm : Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers α.

[- $\forall n$ on a $a = a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0 = b$ (Récurrence)

- On en déduit (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
- $\forall n$ $v_n - u_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n]{} 0$ (Récurrence).

Soit ℓ la limite commune à a_n et b_n, on a $\ell \in [a,b]$ et $\forall n$ $f(u_n) \leq 0 \leq f(v_n)$ (Récurrence)
et la continuité de f en ℓ donne $f(\ell) \leq 0 \leq f(\ell)$ ie $f(\ell) = 0$ ie $\boxed{\ell = \alpha}$]

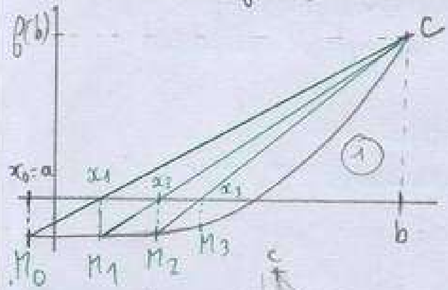
3) Majoration de l'erreur :

Prop : On a $|a_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}$ et $|b_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}$ [évident]

Pour un ε donné on s'arrête lorsque $\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$ (contrôle de l'erreur)

Cette méthode est plutôt lente.

II Méthode de Lagrange (ou Méthode des sécantes)



1) Principe :

On trace les segments $[CM_m]$ où $C(b, f(b))$ et $M_m(x_m, f(x_m))$. L'intersection de $[CM_m]$ et de l'axe (Ox) se fait au point d'abscisse x_{m+1}

$$\frac{-f(x_m)}{x_{m+1} - x_m} = \frac{f(b) - f(x_m)}{b - x_m}$$

ie égalité du coeff directeur de $[M_m X_{m+1}]$ et $[M_m C]$ où $X_m = (x_m, 0)$

(Rq : On aurait f concave

$$\Leftrightarrow x_{m+1} = x_m - f(x_m) \frac{b - x_m}{f(b) - f(x_m)}$$

$$\Leftrightarrow x_{m+1} = \frac{x_m f(b) - b f(x_m)}{f(b) - f(x_m)}$$

$$x_{m+1} = g(x_m) \text{ où } g(x) = \frac{x f(b) - b f(x)}{f(b) - f(x)}$$

2) Convergence (Thm qui assure la convergence de cette méthode)

Thm : Soit f définit dans le cadre de l'exposé. Si f est $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et si f'' a un signe constant sur $[a, b]$ alors $(x_m)_m$ donnée par $x_{m+1} = \frac{x_m f(c) - f(x_m) c}{f(c) - f(x_m)}$ cv vers α l'unique racine de f sur $[a, b]$

si on prend $\begin{cases} x_0 = a \text{ et } c = b \text{ lorsque } f' \times f'' > 0 \\ x_0 = b \text{ et } c = a \text{ lorsque } f' \times f'' < 0 \end{cases}$

cas (1) et (2)

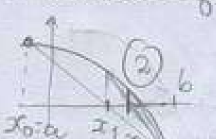
(ie convexe et f croissante (1) ou concave et f décroissante (2))

(ie concave et f croissante (3) ou convexe et f décroissante (4))

II On traite le cas $f' > 0$ et $f'' > 0$. ie $x_0 = a$ et $c = b$

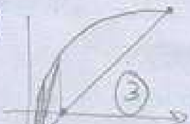
Mq par récurrence que $x_m \in [a, \alpha]$

- propriété vraie au rang 0 car $x_0 = a \in [a, \alpha]$
- On suppose que la propriété est vraie au rang m.



On $f(x_m) \leq 0$ (car f strict crois et $f(x^*) = 0$)

$\frac{b - x_m}{f(b) - f(x_m)} > 0$ car f strict crois.



(4) Même chose

$x_{m+1} - x_m = -f(x_m) \frac{b - x_m}{f(b) - f(x_m)} > 0$ donc $(x_m)_m$ strict croissante.

et $x_{m+1} = t x_m + (1-t) b$ (ie $x_{m+1} \in [M_m C]$)

et la convexité de f permet d'affirmer que $f(x_{m+1}) \leq 0$ (Il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre)

Donc $x_{m+1} \in [a, \alpha]$ ie propriété vrai au rang $m+1$.

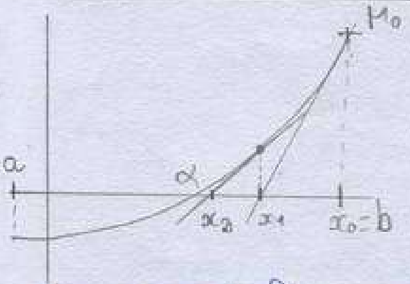
Donc $(x_m)_m$ suite strict croissante et majorée de $[a, \alpha]$ ie (x_m) converge vers $\ell \in [a, \alpha]$

et $x_{m+1} = \frac{x_m f(b) - f(x_m) b}{f(b) - f(x_m)} \Rightarrow \ell = \cancel{\frac{\ell f(b) - f(\ell) b}{f(b) - f(\ell)}}$

$\ell \in [a, \alpha]$ et dc $f(\ell) = 0$ dc $\ell \neq b$ dc $x_m \to \alpha$ $\Rightarrow$ $\boxed{\ell = \alpha}$

qd $x_m \to \ell$ on obtient $\ell = \frac{\ell f(b) - f(\ell) b}{f(b) - f(\ell)} \Leftrightarrow 0 = \frac{\cancel{\ell f(b)} - f(\ell) b - \cancel{\ell f(b)} + \ell f(\ell)}{f(b) - f(\ell)} = \frac{f(\ell)[\ell - b]}{f(b) - f(\ell)}$

III Méthode de Newton :



1) Principe :

On trace les tangentes à la courbe en $M_n(x_n, f(x_n))$. L'intersection de la tangente en M_n avec (Ox) se fait au point d'abscisse x_{n+1}.

Equation de la tangente en M_n :

$T_n : y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$

$X_n(x_{n+1}, 0) \in T_n$ ie $0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$

ie $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$

2) Convergence :

Thm : Ds le cadre de la leçon, si f est de classe C^2 sur $[a,b]$ et si f'' a un signe constant sur $[a,b]$ alors la suite $(x_n)_n$ donnée par

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ a un sens et converge vers l'unique racine α de f si on prend $\begin{cases} x_0 = a \text{ lorsque } f'f'' < 0. \\ x_0 = b \text{ lorsque } f'f'' > 0. \end{cases}$

IV Exemple numérique :

Nous avons vu trois méthodes différentes pour approcher la valeur de α grâce à cet exemple simple nous allons comparer dans ce cas les vitesses de convergence des ces méthodes.

$f(x) = x^2 - 2$ sur $[1,2]$

dichotomie : itérations

lagrange : itérations

newton : itérations.

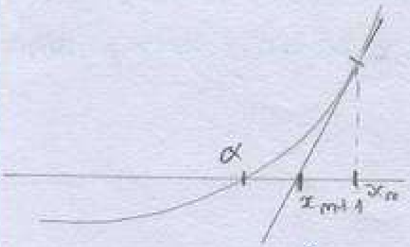
Si on a pas le tps de faire le programme on calcul avec la calculatrice différente valeur. On fait un tableau

Démonstration :

Méthode de Newton :

On traite le cas $f'>0$ et $f''>0$. On a $x_0=b$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Mq par récurrence que $x_n \in [\alpha, b]$

→ $x_0 = b \in [\alpha, b]$ dc propriété vraie au rang n.

- On suppose que la propriété est vraie au rang n.

on a $f(x_n) \geq 0$ car f strict croissante et $f(\alpha)=0$

et $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$ (car $f'>0$)

puis $x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 0$ donc (x_n) strict décroissante.

De plus comme f strict convexe on a $f(x_{n+1}) > 0$ (car les tangentes st strict en dessous de la courbe représentative pour 1 fct convexe)

ie $x_{n+1} > \alpha$ car f strict croissante

ie $x_{n+1} \in [\alpha, b]$ ie la prop vraie rg $n+1$

Donc (x_n) suite de $[\alpha, b]$ strict décroissante et minorée par α

ie $x_n \to \ell \in [\alpha, b]$

et $\underset{\ell}{\underset{\downarrow}{x_{n+1}}} - \underset{\ell}{\underset{\downarrow}{x_n}} = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\quad 0 = \frac{-f(\ell)}{f'(\ell)}$ ce qui donne $f(\ell)=0$

ie $\alpha = \ell$

Donc $x_n \longrightarrow \alpha$