Exposé 63 :

Limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles.
Branches infinies de la courbe représentatrice de la fonction,
Exemples. Calculatrice.

0- Pré Requis :
- Inégalité triangulaire,
- Notion de limite finie ou infinie d'une fct.

Cadre : $f : D \to \mathbb{R}$ où D contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ ou $]-\infty, a[$

I limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles :

Dans ce paragraphe

1) limite finie :

Def : On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp $-\infty$) où $\ell \in \mathbb{R}$
si $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D$ et $x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$
(resp : $\forall \varepsilon > 0, \exists A < 0, \forall x \in D$ et $x < A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$)

Notation : On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Prop : Si f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp $-\infty$) alors elle est unique :

[On suppose que f admet deux limites ℓ et ℓ' tq $\ell \neq \ell'$
$\forall \varepsilon > 0, \exists A_1 > 0, \forall x \in D$ et $x > A_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$
$\exists A_2 > 0, \forall x \in D$ et $x > A_2 \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon$

Si $x > \max(A_1, A_2)$ $|\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'|$
$|\ell - \ell'| \leq 2\varepsilon$
Si on choisit $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{4}$ on arrive à une absurdité]

Exemples : $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $-\infty$ et $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ en $+\infty$.

2) Limite infinie :

Def : On dit que f diverge vers $+\infty$ (ou tend vers $+\infty$) en $+\infty$ (resp $-\infty$)
si $\forall A > 0$ $\exists B > 0, \forall x \in D$ et $x > B \Rightarrow f(x) > A$
(resp $\forall A > 0$ $\exists B < 0, \forall x \in D$ et $x < B \Rightarrow f(x) > A$)

Notation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) Propriétés : Soit f, g deux fonctions définies sur $D =]a, +\infty[$

limites en $+\infty$: (On obtien des résultats similaires en $-\infty$)

$f+g$:

$g \backslash f$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

$f \cdot g$:

$g \backslash f$	$\ell' \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \neq 0$	$\ell\ell'$	0	$\pm\infty$	$\mp\infty$
0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

$\frac{1}{f}$:

f	$\ell' \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$1/f$	$\frac{1}{\ell'}$	$\pm\infty$	0	0

? On ne peut pas conclure, il faut utiliser les théorèmes de comparaisons de limites par encadrement.

ex : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ avec $\alpha > 0$ on sait que $\ln x << x^\alpha \ \forall \alpha > 0$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ car $x^\alpha << e^x \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

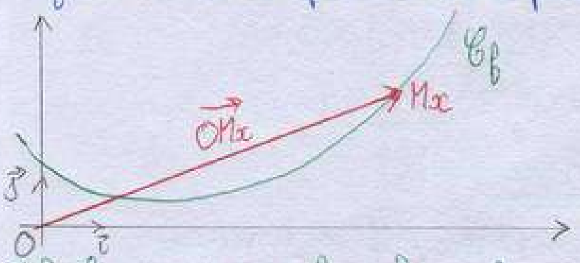
II Branches infinies de la courbe représentatrice de f. $\mathcal{C}_f$

Dans la suite, f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide non réduit à un point

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère associé à $\mathcal{P}$

$\forall x \in I$ on note M_x le point de $\mathcal{P}$ tq $\overrightarrow{OM_x} = x\vec{i} + f(x)\vec{j}$

$\mathcal{C}_f$ l'ensemble des pts M_x où x parcourt I et OM_x la distance de O à M_x.



Dans ce qui suit $a \in \overline{I} \setminus I$

Def $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en a ssi $\lim_{x\to a} OM_x = +\infty$

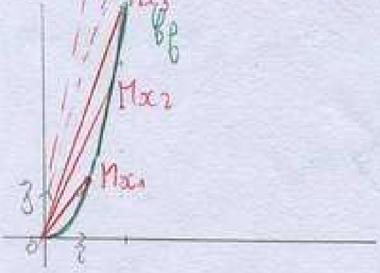
Rq : . La définition précédente est indépendante du point O. On peut choisir $O' \in \mathcal{P}$ quelconque

. Selon la forme de I et la valeur de a on a une branche infinie à gauche ou à droite de a

- Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en a ssi $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$

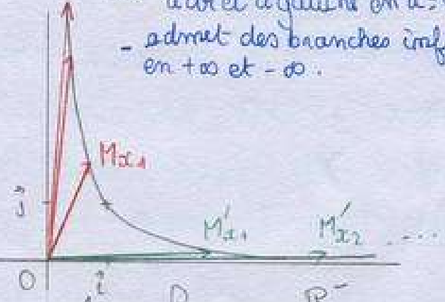
- Si $a \in \{-\infty, +\infty\}$ alors $\mathcal{C}_f$ admet toujours une branche infinie en a, mais on n'a pas de précision sur $f(x)$ au voisinnage de a.

Ex : $x \mapsto x^2$ admet une branche infinie en $+\infty$ et $-\infty$.



$x \mapsto \frac{1}{x}$ admet des branches infinies à dr et à gauche en $a = 0$

- admet des branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$.



Même chose sur $\mathbb{R}^-$

Dans la suite on suppose que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$

2) Direction asymptotique :

~~Def : Soit $M_x(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$, ssi la pente de (OM_x) a une limite finie m (resp infinie) lorsque x tend vers a, on dit que $\mathcal{C}$ admet la direction de $\vec{u}(1, m)$ (resp (Oy)) en a comme direction asymptotique en a~~

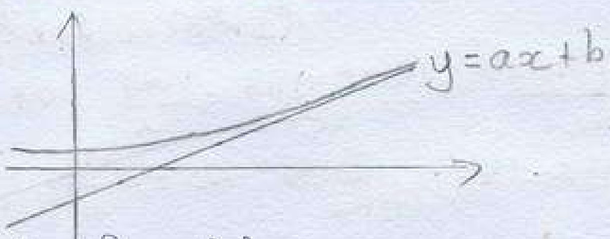
1) Asymptotes :

Def : Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ la droite $D : y = \ell$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

Def : Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax + b)) = 0$ la droite $D : y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$

Thm : $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique $D : y = ax + b$ ssi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $a \neq 0$ et $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$.

Ex :

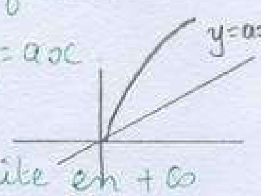


2) Branche parabolique :

Def : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) ex : $x \mapsto x^2$

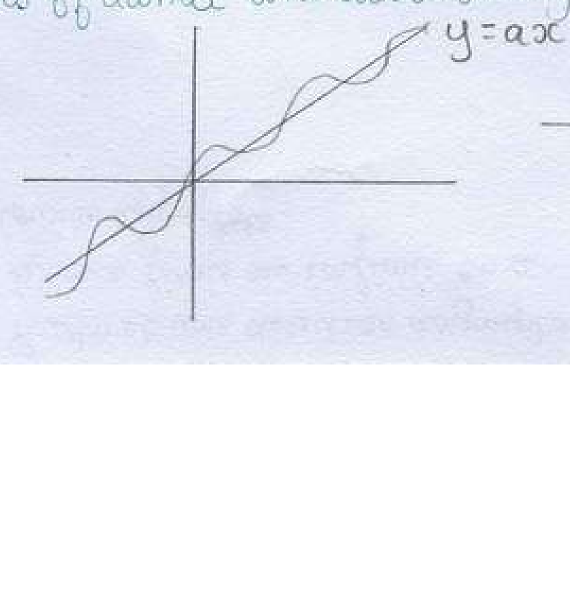
Def : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox) ex : $x \mapsto \ln x$.

Def : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim (f(x) - ax) = +\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite $y = ax$



3) Direction asymptotique.

Def : Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $f(x) - ax$ n'a pas de limite en $+\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une direction asymptotique $y = ax$



exemple : $f(x) = x + \sin x$.