Question bête

$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

où $f(x) = 0$ si $x = 0$
$\qquad\quad 1$ si $x \in \mathbb{R}^*$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$? en fait f n'a pas de limite en 0. Supposons que f a pour limite ℓ

i.e. $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$ i.e. $\forall \varepsilon > 0$ $|x| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

i.e. si on prend $x \neq 0$, $|x| < \eta \Rightarrow |1 - \ell| < \varepsilon$ i.e. $\ell = 1$

si on prend $x = 0$ $|0| < \eta \Rightarrow |-\ell| < \varepsilon$ i.e. $\ell = 0$

$\ell = 0$ et $\ell = 1$ absurde pas de limite en 0.

Exposé 62

Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$. Opérations algébriques sur les limites. Continuité d'une fct en un point. Exemples.

0 - Pré-Requis.

- fonctions usuelles
- fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles : ensemble de définition restriction de fonctions ...
- suites réelles convergentes.

Dans la suite si f désigne une fonction, D_f désigne son domaine de définition.

I Limite finie d'une fonction en un point $a \in \mathbb{R}$

On considère $f : D_f \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

On suppose qu'il existe $\eta > 0$ tq $]a-\eta, a+\eta[\subset D_f \cup \{a\}$

i.e. f est définie sur un voisinage de a sauf peut être en a

1) Déf et prop :

Déf : f admet une limite ℓ, $\ell \in \mathbb{R}$ en a si :

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta > 0$ $\forall x \in D_f$ $|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

On note alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Rq : En fait f est bornée dans un voisinage de a

Ex : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$ soit $a \in \mathbb{R}^+$ $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Thm : Si f admet une limite ℓ, $\ell \in \mathbb{R}$ en a alors elle est unique.

[Soit ℓ, ℓ' $\ell \neq \ell'$ deux limites de f en a

i.e. $\forall \varepsilon > 0$ $\begin{cases} \exists \eta > 0 \ \forall x \in D_f \ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ \exists \eta' > 0 \ \forall x \in D_f \ |x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon \end{cases}$

Si on prend $\tilde{\eta} = \min(\eta, \eta')$

on a $\forall x \in D_f$ $|x - a| < \tilde{\eta}$

on a $0 < |\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'|$
$< 2\varepsilon$ d'où $\ell = \ell'$]

Prop : Si f est définie en a. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $f(a) = \ell$

Prop : $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D_f$ si $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ alors $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$

Exemple: Montrer que $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Pour cela on considère : $x_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$
$n \in \mathbb{N}^*$

$y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = -1$

Donc f n'admet pas de limite en 0.

2) Limite à Droite, à gauche :

Def : f admet une limite ℓ, $\ell \in \mathbb{R}$ à droite (resp à gauche) en a si la restriction de f à $D_f \cap]a, +\infty[$ (resp $D_f \cap]-\infty, a[$) admet la limite ℓ en a

Notation: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$ $\left(\text{resp } \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell\right)$

Exemple: La fonction partie entière admet en tout point $t \in \mathbb{Z}$ une limite à droite et une limite à gauche. (et celles ci sont distinctes. Mais n'admet pas de limite en aucun $t \in \mathbb{Z}$.

Prop: Si f admet une limite ℓ en a. Si f admet une limite à gauche (resp à droite) en a alors elle admet ℓ comme limite à gauche (resp à droite) en a.

3) Continuité:

Def: f continue en a si :
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tq $|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Prop: f continue en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ [évident]

Exercice 1 Montrer que f est continue en 1 :

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 2x^2 - 1 & x < 1 \\ \sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

on applique prop précédente

Exercice 2: Déterminer le réel a pour que f soit continue en 0.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} -3x + 2 & x < 0 \\ a & x = 0 \\ \sqrt{x+4} & x > 0 \end{cases}$$

II Opérations algébriques :

Soit f, g deux fcts de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur D

Soit $a \in \overline{D}$ ($\forall \eta > 0\ ]a-\eta, a+\eta[\cap D \neq \emptyset$)

On suppose que f et g admettent les limites l et l' en a.

1) Somme

Prop : La fonction $(f+g)$ admet la limite $(l+l')$ en a.

2) Produit

Prop : La fonction $f.g$ admet la limite $l \times l'$ en a.
et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf admet la limite λl en a.

3) Inverse :

Prop : Si on suppose de plus que $\forall x \in D \cdot f(x) \neq 0$, $l \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ admet la limite $\frac{1}{l}$ en a.

4) Composition :

Prop : Soit f qui admet une limite b en a, g une fonction qui admet la limite l en b alors la fonction $g \circ f$ admet la limite l en a.

III Exemples (illustrant les opérations algébriques) :

Etudier les limites suivantes :

* en -1 $\quad \dfrac{x^5+1}{x^3+1}$ $\quad \dfrac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \to \dfrac{5}{3}$

* en e $\quad (2\ln x)(3x^2+1)$ $\quad 6e^2+2$

* en 0 $\quad \dfrac{\cos x - \sin x - e^x}{\ln(1+x)}$ $\quad$ On utilise les DL

$$= \frac{x - x - 1 - x + o(x)}{x + o(x)}$$

* en 0 $\quad \ln(1+\cos x)$

$$= \frac{-2 + o(1)}{1 + o(1)} = -2 + o(1)$$

$\downarrow$
$\ln 2$
(composition thm)

Donc $\lim = -2$

Prop: Si f est définie en a et f admet une limite ℓ en a alors $f(a)=\ell$

[$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0$ tq $\forall x\in D_f$ $|x-a|<\eta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$a\in D_f$ donc par hypothèse $0=|a-a|<\eta$

donc $\forall \varepsilon>0$ $|f(a)-\ell|<\varepsilon$

Pour $\varepsilon=\frac{|f(a)-\ell|}{2}$ ie $|f(a)-\ell|<\frac{|f(a)-\ell|}{2}$

ie $|f(a)-\ell|=0$ ie $f(a)=\ell$]

Prop: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D_f$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\ell$

[On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$

ie $\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0$ tq $\forall x\in D_f$ $|x-a|<\eta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$

ie $\forall \varepsilon'>0\ \exists N>0$ tq $\forall n\geq N$ $|x_n-a|<\varepsilon$

soit $\varepsilon>0$ $\exists \eta_\varepsilon>0$ tq $\forall x\in D_f$ $|x-a|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$ (*)

$\exists N_{\eta_\varepsilon}\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N_\varepsilon$ $|x_n-a|<\eta_\varepsilon$

ie $\exists N_{\eta_\varepsilon}$ tq $\forall n\geq N_\varepsilon$ $|f(x_n)-\ell|<\varepsilon$ D'après (*)

ie $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\ell$

Réciproquement: On suppose que $(x_n)_n\subset D_f$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\ell$

$\lim\limits_{x_n\to a} f(x_n)=\ell$]

Prop: Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$. Si f admet une limite à gauche (resp à droite) en a alors elle admet ℓ comme limite à gauche (resp à droite) en a.

[Rappel:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall x\in D_f$ $|x-a|<\eta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\ell' \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\eta'>0\ \forall x\in D_f\cap]-\infty,a[$ $|x-a|<\eta$ $|f(x)-\ell'|<\varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \eta' > 0$ $\forall x \in D_f \cap]-\infty, a[$ $|x-a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon$

$\exists \eta'' > 0$ $\forall x \in D_f$ $|x-a| < \eta'' \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

soit $\eta = \min(\eta', \eta'')$

soit $x \in D_f \cap]-\infty, a[$ tq $|x-a| < \eta$

$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$

ie $|\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'|$
$\leq 2\varepsilon$

or ε est quelconque ie $\boxed{\ell = \ell'}$]]

Rq: L'existence d'une limite à gauche et à droite en un pt ne suffit pas pour dire que cette fct est continue (même si ces limites sont les même).

Démo : Somme, produit, quotient composition voir Exo ma soeur.

[[$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_\varepsilon > 0\ \forall x \in D_f$ tq $|x-a| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell' \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0\ \exists \eta_{\varepsilon'} > 0\ \forall x \in D_f$ tq $|x-a| < \eta_{\varepsilon'} \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \varepsilon'$

Somme:

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta_\varepsilon, \eta_{\varepsilon'}$ tq .....
Soit $\eta = \min(\eta_\varepsilon, \eta_{\varepsilon'})$ $\forall x \in D_f$ $|x-a| < \eta$

$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (\ell + \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'|$
$\leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon$.

Produit:

$|f(x)g(x) - \ell\ell'| = |(f(x) - \ell)g(x) + (g(x) - \ell')\ell|$

$\leq \underbrace{|f(x) - \ell|}_{< \varepsilon}|g(x)| + \underbrace{|g(x) - \ell'|}_{< \varepsilon} \ell \leq (\ell' + \varepsilon)\varepsilon' + \varepsilon\ell \leq \tilde{\varepsilon}$ ...

De plus on utilise le fait que g est borné au vois de a.

ie $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_\varepsilon$ tq $\forall x$ tq $|x-a| < \eta \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \varepsilon \Leftrightarrow |g(x)| < \ell' + \varepsilon$

Inverse:

$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \frac{|f(x) - \ell|}{|f(x)|\ell}$ on utilise le fait que f est bornée au voisinnage de a.