Exposé 60 :

Etude de suites de terme général a^n, n^b et $n!$.
Croissances comparées. Exemples de comparaison de suites avec suites précédentes. Calculatrice.

0_ Pré-Requis :

- Suites réelles, convergentes, divergentes.
- opérations algébriques et comparaison de suites
- Fonctions logarithmes et exponentielles.

- formule du binôme.
- limite composition de fcts.
- récurrence

I Etude des suites (a^n), (n^b) et $(n!)$

1) Etude de $u_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$

Prop : i) Si $a = 1$ la suite est constante et vaut 1.
ii) si $a > 1$ la suite est croissante tend vers $+\infty$.
iii) Si $-1 < a < 1$ la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.
iv) Si $a = -1$, (u_n) diverge et prend pour valeur $\begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ impair.} \end{cases}$
v) Si $a < -1$, (u_n) diverge ((u_{2k}) diverge vers $+\infty$ et (u_{2k+1}) diverge vers $-\infty$.

[i) évident et iv) idem.
ii) Si $a > 1$, on pose $a = 1 + h$ $(h > 0)$ $a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \longrightarrow +\infty$ dc $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$
^ formule binôme

iii) si $a = 0$ suite constante égale à 0.
Si $0 < a < 1$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a < 1$ donc la suite $u_n = a^n$ est décroissante et minorée par 0. donc elle cv vers $l \geq 0$
et $l = al \Rightarrow l(1-a) = 0 \Rightarrow l = 0$.
Si $0 > a > -1$ alors $|u_n| \to 0$ et donc $u_n \to 0$]

Rq : $|u_n| \to l \Rightarrow u_n \to l$ vrai ssi $l = 0$ (Par contre $\Leftarrow$ tjs vrai)

2) Etude de $u_n = n^b$, $b \in \mathbb{R}$

Prop : Soit $(u_n)_n$ une suite de terme général n^b, $b \in \mathbb{R}$.
i) Si $b < 0$; (u_n) est décroissante et tend vers 0.
ii) Si $b = 0$, (u_n) est constante égale à 1.
iii) Si $b > 0$, (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$

[$b = 0$ évident. $v_n = \ln u_n = \ln(n^b) = b \ln n$ si $b < 0$ (v_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$
si $b > 0$ (v_n) croissante et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$

Avec le théorème de Composition des limites par une application.
on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } b > 0 \\ 0 \text{ si } b < 0 \end{cases}$ de plus $u_n = e^{v_n}$ d'où la décroissance ou croissance suivant la valeur de b.]

3) Etude de $u_n = n!$

Prop: La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = n!$ est strictement croissante et divergente vers $+\infty$.

[$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 > 1 \Rightarrow (u_n)$ strictement croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = n! = n(n-1)! \geq n$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.]

II Croissance Comparée

1) Définition:

Def: Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles, $(v_n)_n$ ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors on dit que u_n est négligeable devant v_n.

On note $u_n << v_n$

Thm: Soit (u_n) une suite réelle.

i) S'il existe $k \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ii) S'il existe $k \in]1,+\infty[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $|u_{n+1}| \geq k|u_n|$ alors $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

[i) Par récurrence on obtient: $\forall p \in \mathbb{N}$ $|u_{n_0+p}| \leq k^p |u_{n_0}|$ d'où le résultat.

car $k \in]0,1[$, par le thm des gendarmes $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

ii) Par récurrence $\forall p \in \mathbb{N}$ $|u_{n_0+p}| \geq k^p \underbrace{|u_{n_0}|}_{>0}$

$k > 1$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} k^p |u_{n_0}| = +\infty$

Donc on conclut par le théorème de comparaison des suites.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$]

Corollaire: Soit (u_n) une suite réelle dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang, et telle que $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ tend vers $l \in \mathbb{R}^+$.

i) Si $l < 1$ alors $\lim (u_n) = 0$ $\Leftarrow$ ici on a en fait $\lim(|u_n|) = 0$

ii) Si $l > 1$ alors $\lim(|u_n|) = +\infty$ $\quad |u_n| \to l \Rightarrow u_n \to l$ ssi $l = 0$

2) Applications aux suites a^n, n^b et $n!$

Thm: $a \neq 0$ et $n \geq 1$ i) si $|a| > 1$ alors $n^b << a^n << n!$ avec $b > 0$

ii) si $|a| < 1$ alors $\frac{1}{n!} << a^n << n^b$ avec $b < 0$

[Posons $u_n = \frac{n^b}{a^n}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^b}{a^{n+1}} \times \frac{a^n}{n^b} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b \times \frac{1}{a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a}$

On a bien si $|a| > 1$ d'après le corollaire $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ avec $l < 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ie $a^n >> n^b$

Et si $|a| < 1$ même chose $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} (= u_n) = +\infty$ ie $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^b} = 0$ ie $a^n << n^b$

Posons $u_n = \frac{a^n}{n!}$ on obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (a quelconque de cette démo

donc d'après le corollaire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ ie $n! >> a^n$)

Enfin si $|a|<1$, $\frac{1}{n!\,a^n} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'après ce qui précède]]

Application : 1) $\lim\limits_{n \to +\infty} (a^n n^b) = +\infty$ avec $a>1$ et $b<0$

2) $\lim (n!\,n^b) = +\infty$ avec $b<0$

...

III. Comparaison de suites aux précédentes :

Thm : Soit α, β et b des réels strictement positifs et $a \in \mathbb{R}$, $a>1$
Alors les suites de terme général a^n, n^b, $n!$, $(\ln n)^\alpha$, $e^{\beta n}$, n^n divergent vers $+\infty$ et on a : $(\ln n)^\alpha << n^b << e^{\beta n} << a^n << n! << n^n$ si $e^\beta < a$

$(\ln n)^\alpha << n^b << a^n << e^{\beta n} << n! << n^n$ si $a < e^\beta$

Application : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^b}{n^n}$ avec $b>0$ ...

..... On peut imaginer un paquet de suites ...

[[Démo Thm : on a déjà $n^b << a^n << n!$

- $e^{\beta n} = (e^\beta)^n$ donc $e^{\beta n} << a^n$ si $e^\beta < a$ et $e^{\beta n} >> a^n$ si $e^\beta > a$
- $\frac{(\ln n)^\alpha}{n^b} = \left[\frac{\ln n}{n^{b/\alpha}}\right]^\alpha = \left[\frac{\frac{\alpha}{b} \times \ln(n^{b/\alpha})}{n^{b/\alpha}}\right]^\alpha$ car $\ln(n^{b/\alpha}) = \frac{b}{\alpha}(\ln n)$

avec $\alpha>0$ et $b>0$

$= \left(\frac{\alpha}{b}\right)^\alpha \left[\frac{\ln u_n}{u_n}\right]^\alpha$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{b/\alpha} = +\infty$

et $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

d'où $(\ln n)^\alpha << n^b$ $\quad \underline{\underline{= 0}}$

- $\frac{n^n}{n!} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \times \underbrace{\frac{n}{(n-1)}}_{>1} \times \dots \times \underbrace{\frac{n}{1}}_{>1} \geqslant n$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ ie $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

ie $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

ie $n^n >> n!$]]