Exposé 6 :

Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de Probabilité. Espérance Mathématique variance. Exemples.

0 - Pré Requis :

- langage ensembliste
- Expérience aléatoire.
- notion application.
- espace probabilisé.

Cadre : (Ω, P) un espace probabilisé.

I Variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs est fini.

1) Variable aléatoire à valeurs réelles.

Déf : On appelle variable aléatoire à valeurs réelles que l'on note var toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$

$X(\Omega)$ est appelé univers image de Ω par X.

Rq : Dans toute la suite on considère que $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

Exemple : On lance une pièce de monnaie 3 fois. On note les apparitions des côtés "pile" et "face". On a donc $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FFF, FFP, FPF, FPP\}$

card $\Omega = 8$. Il y a équiprobabilité sur Ω. ie $\forall w \in \Omega$, $P(w) = \frac{1}{8}$

Supposons : Pile $\Rightarrow$ On gagne 3 €

Face $\Rightarrow$ On perd 2 €

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
$w \rightarrow X(w)$ où $X(w)$ est le gain
est une var

$X(\Omega) = \{-6, -1, 4, 9\}$

2) Loi de probabilité :

Thm : Soit X une var sur (Ω, P). On définit une probabilité P' sur $X(\Omega)$ en posant $P'(A) = P(X^{-1}(A))$, $A \in X(\Omega)$

[$A, B \in X(\Omega)$ disjoints, $X^{-1}(A)$ et $X^{-1}(B)$ le sont aussi (Prop application).

$$P'(A \cup B) = P(X^{-1}(A \cup B)) = P(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A)) + P(X^{-1}(B))$$
$$= P'(A) + P'(B)$$

et $P'(X(\Omega)) = P(\Omega) = 1$ d'où P' probabilité sur $X(\Omega)$]

Déf : La probabilité P' est appelé loi de probabilité de la var X

Représentation : Une loi de probabilité se représente de façon pratique sous forme de tableau.

Exemple : On reprend notre exemple

$x \in X(\Omega)$	-6	-1	4	9
$P'(x)$ $\overset{?}{=}$ $P(X=x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

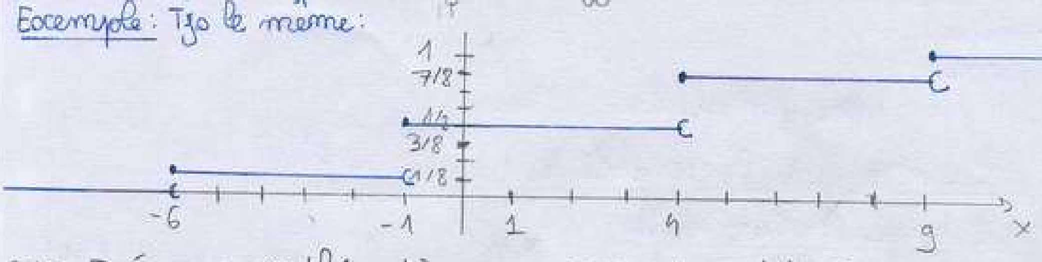
3) Fonction de répartition :

Déf : La fonction de répartition d'une var X sur (Ω, P) est l'application

$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto P(X \leq x)$$

Rq : Connaitre la fonction de répartition de X revient donc à connaitre la loi de probabilité de X. (En effet $P(X=x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$)

Exemple : Tjs le même :



II Espérance mathématique, variance et écart type :

Soit X une var définie sur (Ω, P) tq $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ soit fini.

Notation : $p_i = P(X = x_i)$

1) Espérance mathématique :

Déf : L'espérance mathématique d'une var X est le nombre réel défini par $E(X) = \sum_{i=1}^{m} P(X=x_i) \times x_i$

Rq : L'espérance mathématique apparait comme la moyenne prise par la var X

Déf : Si $E(X) = 0$ on dit que la var est centrée.

Exemple : $E(X)$ représente le gain moyen que l'on peut espérer.

$$E(X) = \frac{1}{8} \times (-6) + \frac{3}{8} \times (-1) + \frac{3}{8} \times 4 + \frac{1}{8} \times 9 = \frac{3}{2}$$

Le gain moyen que l'on peut espérer est 1,5 euros.

Thm : Linéarité de l'espérance :

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y$ var sur Ω, $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$

[Soit X, Y var sur Ω, Mq $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i) = 1 = \sum_{i=1}^{m} p_i$

$Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ et $\sum_{i=1}^{p} P(Y=y_i) = 1 = \sum_{i=1}^{p} q_j$ avec $x_i + y_j = z_k$ ie $i+j=k$

$$E(X+Y) = \sum_{k=1}^{m+p} P(X+Y = z_k) z_k = \sum_{k=1}^{m+p} P((X=x_i) \cap (Y=y_i))(x_i + y_j)$$

$$= \sum_{i,j} P((X=x_i) \cap (Y=y_i))(x_i + y_j)$$

$$= \sum_{i,j} P((X=x_i) \cap (Y=y_j)) x_i + \sum_{i,j} P((X=x_i) \cap (Y=y_j)) y_j .$$

$$= \sum_{i,j} \cancel{P(X=x_i) | (Y=y_j)) P(Y=y_j)} + \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{p} P((X=x_i) \cap (Y=y_j))}_{= P(Y=y_j)} y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} P(X=x_i) | (Y=y_j))$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \underbrace{\sum_{j=1}^{p} P((X=x_i)|(Y=y_j))P(Y=y_j)}_{P(X=x_i)\underbrace{\sum_{j=1}^{p}(Y=y_j)}_{=1}} + \sum_{j=1}^{p} y_j \underbrace{\sum_{i=1}^{m} P((Y=y_j)|(X=x_i))P(X=x_i)}_{P(Y=y_j)\underbrace{\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i)}_{=1}}$$

$= E(X)+E(Y)$]]

Exemple: Lors du lancer de deux dés, quelle est la moyenne des sommes de points obtenue?

X_i : points obtenus sur le dé numéro i, $i=1,2$

$X = X_1 + X_2 \quad E(X) = E(X_1)+E(X_2) = 2E(X_1) = 2\times\left[\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)\right] = 7$

2) Variance et ecart type :

Deux var peuvent avoir la même espérance tout en présentant des caractéristiques de dispersion très différentes. plusieurs dispersion possible tout le monde a 8 ou moitié 4 et l'autre moitié 12

30 élèves l'espérance note moyenne que l'on peut obtenir 8 par ex.)

Def : On appelle variance de X l'espérance de la var $[X-E(X)]^2$ et on la note $V(X)$

$$V(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} (x-E(X))^2 P(X=x)$$

Def : L'ecart type noté $\sigma(X)$ est la racine carré de $V(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Rq : $V(X)$ et $\sigma(X)$ mesurent la dispertion autour de la moyenne.

Dans notre exemple : $V(X) = \left(-6-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8} + \left(-1-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8} + \left(4-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8} + \left(9-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}$

$= 75/4 = 18,75$

$\sigma(X) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Plus $V(X)$ est grand plus la dispersion est grande.

Prop : $V(\alpha X+\beta) = \alpha^2 V(X) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ [[evident en écrivant la formule]]

Thm : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

[[$V(X) = \sum_{i=1}^{m} p(X=x_i)(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{m} p_i(x_i^2 - 2E(X)x_i + E(X)^2)$

$= E[X^2] - 2\sum_{i=1}^{m} E(X)\underbrace{p_i x_i}_{E(X)} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)}_{=1} E(X)^2$

$= E[X^2] - 2E(X)\left(\sum_{i=1}^{m} p_i x_i\right) + E(X)^2$

$= E(X^2) - E(X)^2$