Exposé 59 :

Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie : comparaison, opérations algébriques, composition par une application.

⚠ Dans cette leçon la chose à retenir c'est qu'1 suite div est une suite qui ne converge pas

2 types de suite divergente → suite divergeant vers $+\infty$
→ suites qui ne font rien

0. Pré Requis :

- Suite réelle, suite convergente
- Limites de fonctions.

I Suites divergentes :

Def : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente dans $\mathbb{R}$ si elle ne converge pas vers un nombre réel. ie $\forall \ell\in\mathbb{R}, \exists \varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\geq N$ tq $|u_n-\ell|>\varepsilon$

Rq : i) Une suite non bornée diverge
ex : $((-1)^n n)$

ii) Toute suite admettant deux suites extraites ne convergeant pas vers la même limite diverge. ex $((-1)^n)$ diverge ($u_{2n}=1$ et $u_{2n+1}=-1$)

II Suites divergentes vers l'infini.

1) Définition et propriétés :

Def. On dit que $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ (resp $-\infty$) si
$\forall A\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{N}, n\geq N \Rightarrow u_n\geq A$ (resp $\forall A\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{N} \Rightarrow u_n\leq A$)

Rq : divergentes car non bornées d'après cette définition.

Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

Prop : i) Toute suite divergeant vers $+\infty$ (resp $-\infty$) est minorée et non majorée (resp majorée et non minorée)

ii) Si $(u_n)_n$ diverge vers l'infini alors $(|u_n|)$ diverge vers $+\infty$.

iii) Toute suite extraite d'une suite divergeant vers $+\infty$ (resp $-\infty$) est divergente vers $+\infty$ (resp $-\infty$).

[facile à montrer en passant par la définition]

Prop : Si $(u_n)_n$ croissante (resp décroissante) alors
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=+\infty \iff (u_n)_n$ non majorée
(Resp $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=-\infty \iff (u_n)_n$ non minorée)

[$\Rightarrow$ évident
$\Leftarrow$ On suppose que $(u_n)_n$ non majorée.
alors $\forall A>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ tq $u_N>A$
la croissance de $(u_n)_n$ donne $\forall n>N\quad u_n>A$ ie $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=+\infty$]

2) Opérations algébriques :

a) Somme :

Prop : i) Si $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et $(v_n)_n$ minorée alors $(u_n+v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

ii) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $(v_n)_n$ majorée alors $(u_n+v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

[i) soit m un minorant de v_n

soit $A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N \Rightarrow u_n \geq A - m$

$\forall n \geq N \Rightarrow u_n + v_n \geq A$

ie $\lim_{n\to\infty} (u_n+v_n) = +\infty$]

Recapitulatif :

$\lim_{n\to\infty} u_n$	$\lim_{n\to\infty} v_n$	$\lim_{n\to\infty} (u_n+v_n)$
$P \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$P \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple :

$\left.\begin{array}{l} u_n = n \\ v_n = -n \end{array}\right\} u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\left.\begin{array}{l} u_n = n \\ v_n = -3n \end{array}\right\} u_n + v_n = -2n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

b) Produit :

Prop : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

[Il suffit d'appliquer la définition]

Prop : i) Si $u_n \to +\infty$ (resp $u_n \to -\infty$) et si $(v_n)_n$ est minorée par un réel strictement positif alors $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = +\infty$ (resp $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = -\infty$)

ii) Si $u_n \to +\infty$ (resp $u_n \to -\infty$) et si $(v_n)_n$ est majorée par un nombre réel strictement négatif alors $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = -\infty$ (resp $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = +\infty$)

[i) m minorant de $(v_n)_n$, $m > 0$

Soit $A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N \Rightarrow u_n > \frac{A}{m}$

$\Rightarrow u_n \times m > A$ or $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n \geq m > 0$

$\Rightarrow u_n v_n > A$

ie $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = +\infty$]

Rq : Le résultat est faux si $(v_n)_n$ minorée par 0 (ou majorée).

ex : $u_n = \sqrt{n}$, $v_n = \frac{1}{n}$ } $\lim_{n \to +\infty} u_n v_n = 0$ Il faut bien strictement positif.

Recapitulatif :

u_n \ v_n	$+\infty$	$l > 0$	$l < 0$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

ex : $u_n = n$, $v_n = \frac{1}{n}$ } $u_n v_n = 1$

$u_n = n^2$, $v_n = \frac{1}{n}$ } $u_n v_n = n$

c) Inverse :

Prop : Soit $(u_n)_n$ une suite de réels non nuls alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$ a pour limite :

u_n	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$1/u_n$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

3) Comparaison :

Thm : Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ alors

i) Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

ii) Si $\lim_{n \to \infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Ex : $u_n = 3n + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \geq v_n = 3n$ donc $\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$.

4) Composition par une application :

Thm : Soit f une application définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]A, +\infty[$ ou $]-\infty, A[$ et $(u_n)_n$ une suite de I tq $\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$ (resp $-\infty$) et si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ (resp $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$) où $l \in I \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l$

[• $\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists A > 0$ tq $\forall x > A$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

de plus $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ $u_n > A$

ie $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $|f(u_n) - l| < \varepsilon$ ie $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.

• Si $l = +\infty$

Soit $A > 0$, $\exists B > 0$ tq $\forall x > B$, $f(x) > A$

de plus $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ $u_n > B$

dc $\forall n \geq N$ $f(u_n) > A$]

Exposé 59 : Démonstrations :

Prop : i) Toute suite div vers $+\infty$ est minorée

$[\![$ $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$:

Soit $A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$, u_n minorée par $\min(A, B)$

où $B = \inf\{u_n \mid n \in [\![0, N-1]\!]\}$

ii) Def car $|u_n| > u_n \geqslant A$.

iii) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict croissante.

Soit $A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$

φ strict croissante dc $\exists n_k \in \mathbb{N}$ tq $\varphi(n_k) \geqslant N$

dc $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geqslant n_k \Rightarrow u_{\varphi(n)} \geqslant A$

ie $\varphi(n) \geqslant \varphi(n_k) \geqslant N$

Prop : (INVERSE)

$[\![$ On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ie $\forall A > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $n > N$ $u_n \geqslant A > 0$

ie $\forall A > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $n > N$ $\frac{1}{u_n} \leqslant A$

ie $u_n \to 0$

Même chose si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ ie $\forall A > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $n > N$ $0 \leqslant u_n < A$

Hypothèse (car $\to 0^+$)

dc $\frac{1}{u_n} > \frac{1}{A}$