Exposé 57 :

Prog complémentaire

Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Comparaison de suites entre elles.

0. Pré-Requis :

- Inégalité triangulaire
- axiome de la borne supérieure (Tout partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne sup).
- Notion de suites majorées, bornées, croissantes, decroissantes..
- Continuité.

suite réelle : $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to u_n$ et suite réelle déf à partir d'un rang c'est une appli $u : \{n \in \mathbb{N}, n \geq N_0\} \to \mathbb{R}$, $n \to u_n$

<u>Cadre</u> : Nous considerons des suites réelles dans les énoncés suivant. Ces énoncés sont encore valable pour des suites définies à partir d'un certain rang

I Suites convergentes :

1) Définition

<u>Def</u> : Une suite réelle $(u_n)_n$ est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tq
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$

<u>Prop</u> : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite alors cette limite est unique.

[On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et ℓ' avec $\ell \neq \ell'$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ $\forall n > N_1$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ $\forall n > N_2$, $|u_n - \ell'| < \varepsilon$

soit $N = \max(N_1, N_2)$ $\forall n \geq N$ $|\ell - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'|$

on a donc $\forall \varepsilon > 0$ $|\ell - \ell'| \leq 2\varepsilon$ CONTRADICTION il suffit de poser $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{4}$ par exemple]

<u>Notion</u> : Si un tel nombre ℓ existe on note $\ell = \lim_{n \to \infty} u_n$ et on dit aussi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

<u>Ex</u> : - Les suites stationnaires est cv
- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cv vers 0.

2) Propriétés :

<u>Prop 1</u> : Toute suite convergente est bornée.

<u>Prop 2</u> : Si (u_n) converge vers ℓ alors $(|u_n|)$ cv vers $|\ell|$ et la réciproque est vrai ssi $\ell = 0$.

<u>Rq</u> : La réciproque de i) est fausse exemple : $(-1)^n$ bornée mais non convergente.

<u>Def</u> : (u_n) une suite, (v_n) une suite extraite de (u_n) si $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_{\varphi(n)}$

<u>Ex</u> : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n)

<u>Prop 3</u> : (u_n) cv vers ℓ ssi toute suite extraite de (u_n) cv vers ℓ.

<u>Rq</u> : cela fournit une preuve de non convergence pour certaines suites :

$u_n = (-1)^n$ non cv car $u_{2n} = 1$ ie u_{2n} cv vers 1

$u_{2n+1} = -1$ ie u_{2n+1} —— -1

Prop 4 : Si $(u_n)_n$ est une suite croissante et majorée alors la suite $(u_n)_n$ converge. (Resp une suite decroissante et minorée est convergente).

[Supposons que $(u_n)_n$ est une suite croissante et majorée.

$A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

Donc on pose $\ell = \sup A$.

Par definition de la borne sup de A :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tq } u_{N_\varepsilon} \in A \text{ et } \ell - \varepsilon < u_{n_\varepsilon} \leq \ell}_{\text{def borne sup (def équivalente)}} < \ell + \varepsilon$$

or (u_n) croissante donc $\forall n \geq N_\varepsilon$

$\ell - \varepsilon \leq u_{n_\varepsilon} \leq u_n < \ell + \varepsilon$ ie (u_n) cv.]

Def : $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes si :
- $(u_n)_n$ croissante
- $(v_n)_n$ décroissante.
- $\lim\limits_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0$

Prop 5 : Deux adjacentes convergent et ont la même limite.

Ex : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ converge ?

Poser $v_n = u_n + \frac{1}{n n!}$ et montrer (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

II Opérations algébriques :

Thm : Soit $k \in \mathbb{R}$, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ tq $(u_n)_n$ cv vers ℓ et $(v_n)_n$ cv vers ℓ'

Alors : i) $(u_n + v_n)_n$ cv vers $\ell + \ell'$

ii) $(u_n \times v_n)_n$ cv vers $\ell \ell'$

iii) $(k u_n)_n$ cv vers $k\ell$

iv) Si $\ell \neq 0$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > N$ $u_n \neq 0$ alors $\frac{1}{u_{n+N}}$ cv vers $\frac{1}{\ell}$

et $\frac{v_{n+N}}{u_{n+N}}$ cv vers $\frac{\ell'}{\ell}$

[i) et iii) évident

ii) Soit $\varepsilon > 0$ $|u_n v_n - \ell\ell'| = |(u_n - \ell) v_n + \ell(v_n - \ell')|$

$\leq |u_n - \ell| |v_n| + |\ell| |v_n - \ell'|$

iv) $\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - v_n}{\ell v_n}\right| = \frac{|v_n - \ell|}{\ell |v_n|}$

or (v_n) cv donc (v_n) borné dc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > N$. $|v_n| < M$

or $|v_n|$ borné et $|v_n - \ell| < \varepsilon$ facile

(u_n) cv dc on pose $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$ et (v_n) cv on pose $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{|\ell|}$

dc $\exists N_{\varepsilon'}$ ... $|u_n - \ell| < \varepsilon'$ et $\exists N_\varepsilon''$ tq ... $|v_n - \ell'| < \varepsilon''$

donc $n > \max(N, N_{\varepsilon'}, N_{\varepsilon''}) \Rightarrow |u_n v_n - \ell\ell'| \leq \varepsilon' \times M + |\ell| \times \varepsilon'' = 2\varepsilon$]

III Composition avec une application continue :

Thm : Soit $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ une suite d'elts de A.
Si $\lim_{n \to \infty} u_n = \ell$, $\ell \in A$. Si f continue en ℓ alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

[Soit $\varepsilon > 0$ alors par continuité de f en ℓ,
$\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in A$ $|x - \ell| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon$
or $\exists N_0$ tq $\forall n > N_0$ $|u_n - \ell| < \eta$ ie $|f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$]

Rq : Ce résultat sert dans l'étude des suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$]

IV Comparaison de suites entre elles :

Soit trois suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$

Thm : Si (u_n) cv vers ℓ et (v_n) cv vers ℓ' et si il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > N$ $u_n \leq v_n$ alors $\ell \leq \ell'$

Thm : (des Gendarmes) : Si $(u_n)_n$ cv vers ℓ et $(w_n)_n$ cv vers ℓ et si $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > N$ $u_n \leq v_n \leq w_n$ alors (v_n) cv vers ℓ

Corollaire : Si $\lim_{n \to \infty} v_n = 0$ et si $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > N$ $|u_n - \ell| \leq v_n$ alors $\lim_{n \to \infty} u_n = \ell$

[Par l'absurde on pose $w_n = v_n - u_n$
$\lim_{n \to +\infty} w_n = \ell' - \ell$ et $\forall n \geq N_1$ $w_n \geq 0$
On suppose que $\ell' - \ell < 0$
$\exists N' \in \mathbb{N}$ tq $n > N'$ $w_n - (\ell' - \ell) \leq \frac{\ell - \ell'}{2}$
Soit $N = \max(N_1, N_2)$ $\forall n \geq N$ $w_n \leq \frac{\ell' - \ell}{2} < 0$ absurde !]

Thm gendarmes : Soit $\varepsilon > 0$
$\forall n \geq N$ $u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell$
$\exists N_1$ $n \geq N_1$ $-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon$
$\exists N_2$ $n \geq N_2$ $-\varepsilon \leq w_n - \ell \leq \varepsilon$
on pose $N' = \max(N, N_1, N_2)$ $-\varepsilon \leq v_n - \ell \leq \varepsilon$]

Rq de le I $\left(\frac{1}{n}\right)_n \to 0$ ie $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ ie $\left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1} \leq \frac{1}{1/\varepsilon}$
[Soit $\varepsilon > 0$ on pose $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ ie $n > N$ ie $n > E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$

Exposé 57 démonstrations :

Prop 1 : Toute suite cv est bornée.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \ n > N \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \ n > N \quad \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$

et pour $n < N \quad \min_{k \in [\![0,n]\!]}(u_k) \leq u_n \leq \max_{k \in [\![0,N]\!]}(u_k)$

existe car ensemble fini

Prop 2 : Si (u_n) cv vers ℓ alors $(|u_n|)$ cv vers $|\ell|$

$||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|$ après il suffit d'appliquer la def à u_n ...

Réciproque : $|(-1)^n| \to 1$ alors $(-1)^n$ ne cv pas.

~~Prop 3 :~~

Prop 3 : (u_n) cv vers ℓ ssi tt suite extraite de (u_n) cv vers ℓ.

$\Rightarrow$ Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict croissante.

Soit $\varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ tq $\forall n > N_\varepsilon \ |u_n - \ell| < \varepsilon$

Rq. Pour la réciproque évident il suffit de prendre $\varphi = Id$.

or $\varphi \nearrow$

donc $\exists n_k$ tq $\varphi(n_k) > N_\varepsilon$

dc $\forall n > N_\varepsilon, \ \varphi(n) > \varphi(n_k) > N_\varepsilon \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$]

Prop 5 : On montre le lemme si (u_n) et (v_n) adjacentes alors $u_n \leq v_n \ \forall n$.

Par récurrence ...

Il suffit d'écrire : $v_{n+1} - u_{n+1} = \underbrace{v_{n+1} - v_n}_{<0 \text{ car } u_n \nearrow} + v_n - u_n + u_n - u_{n+1}$

[$u_n \nearrow$ majorée par $v_0 \xrightarrow{<0 \text{ car } u_n} u_n$ cv vers ℓ

$v_n \searrow$ minorée par $u_0 \longrightarrow v_n$ cv vers ℓ'

$\lim(u_n - v_n) = 0$ ie $\lim u_n = \lim v_n$ ie $\ell = \ell'$.]

Exemple : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ $\quad u_n$ clairement croissante.

$v_n = u_n + \frac{1}{n n!} \qquad \lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n n!} = 0.$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\, n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{\cancel{n^2} + \cancel{n} + \cancel{n} - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - 1}{n(n+1)(n+1)!}$$

< 0.