Exposé 56.

Suites monotones, suites adjacentes. Approximation d'un nombre réel, développement décimal. Calculatrice.

0_ Pré Requis :

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Partie entière d'un réel x, notée $E(x)$
- définition suite réelle et convergente dans $\mathbb{R}$.

I_ Suites monotones :

Déf : une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ est dite croissante si pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n \leq u_{n+1}$
décroissante si ——— $u_n \geq u_{n+1}$

Une suite est dite monotone si elle est croissante ou décroissante

Rq : On peut définir une suite strict croissante en remplaçant $\geq$ par $>$ (idem strict ↘)
- On peut définir la monotonie à partir d'un certain rang.
- Une suite à la fois croissante et décroissante est constante

ex : $u_n = 5n+5$ $(u_n)\nearrow$

Rq2 : Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n) :
- signe de $u_{n+1}-u_n$ (ie signe constant indépt de n)
- si $u_{n+1} = f(u_n)$ étudier la fonction f.
- si (u_n) est une suite à termes strict positifs étudier la quantité $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Thm : Toute suite réelle croissante (resp décroissante) et majorée (resp minorée) est convergente.

[Soit $(u_n)_n$ une suite croissante et majorée.
$(u_n)_n$ majorée donc $\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée donc admet une borne supérieure l.
On a donc $\forall \varepsilon>0$, $\exists p\in\mathbb{N}$ tq $l-\varepsilon < u_p \leq l$ (prop de la borne sup)
La suite (u_n) croissante on en déduit que
$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq p$ $l-\varepsilon < u_p < u_n \leq l$ $\Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$ ie $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$]

Exercice : (u_n) définie par récurrence : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n+1}$.
Mq (u_n) est croissante et majorée par 2. Et mq (u_n) converge vers $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ (Nombre d'or)

II Suites adjacentes.

Déf : Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si, (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et si $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0$

Lemme : Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n \leq v_n$

Thm : Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

[Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, par définition alors :
- (u_n) est croissante et (lemme) majorée par v_0
- (v_n) est décroissante et (lemme) minorée par u_0.

par le thm, (u_n) cv vers l et (v_n) cv vers l'

et par def $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow l-l'=0$
$\Leftrightarrow l = l'$]

Rq: Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ (la limite commune) resp par défaut et excès, avec une erreur inférieure à $\varepsilon_n = v_n - u_n$

Exemple de suites adjacentes : $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n.n!}$ Rq: a_n, b_n cv vers e.

III Applications :

1) Méthode par dichotomie (Pour l'approximation d'un nbr réel) :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a<b$. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$.

et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ \text{ou } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = v_n \end{cases}$

On a $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ adjacentes.

a) Application approximer e avec la fonction $f(x) = \ln(x) - 1$ en posant $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ (f strict croissante sur $[1,3]$ et change de signe)

pour celà on pose si $f(u_n) f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) > 0$ alors $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = v_n \end{cases}$

$f(u_n) f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) < 0$ alors on pose $\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$

Rq : si $f(u_n) f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) = 0$ alors $u_{n+1} = v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ (ie suite stationnaire).

b) Approximer $\sqrt{2}$ avec la fonction $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1,2]$

Même méthode.

2) Développement décimal d'un nombre réel :

a) Valeurs décimales approchées à 10^{-n} près :

Lemme: Pour tout réel x et tout entier naturel n, il existe un unique entier relatif p_n tq $p_n 10^{-n} \leq x < (p_n+1)10^{-n}$

[partie entière de $10^n x$] attention démo

Définition: Les décimaux $d_n = p_n 10^{-n}$ et $e_n = (p_n+1)10^{-n}$ sont appelés valeurs décimales approchées de x à 10^{-n} près resp par défaut et par excès.

Théorème: Les suites d_n et e_n sont adjacentes et de limites x.

[On veut mq (d_n) croissante ie $d_{n+1} = p_{n+1} 10^{-n-1} \geqslant p_n 10^{-n}$

(e_n) décroissante ie $e_{n+1} = (p_{n+1}+1)10^{-n-1} \leq (p_n+1)10^{-n}$

or $\forall k \in \mathbb{N}$ on a $p_k 10^{-k} \leq x < (p_k+1)10^{-k}$ (*)

(*) $p_m 10^{-m} \leqslant x < (p_{m+1}+1)10^{-m-1}$ car comme : $p_m 10^{-m} \leq x < (p_m+1)10^{-m}$, $p_{m+1}10^{-m-1} \leq x < (p_{m+1}+1)10^{-m-1}$

ie $p_m 10^{-m} < (p_{m+1}+1)10^{-m-1}$ ie $10 p_m < p_{m+1}+1$ ie $10 p_m \leq p_{m+1}$

ie $10 \times 10^{-m-1} p_m \leq p_{m+1} \times 10^{-m-1}$

ie $10^{-m} p_m \leq p_{m+1} 10^{-m-1}$

ie $(d_m) \nearrow$

car $p_{m+1}10^{-m-1} \leq x \leq (p_{m+1}+1)10^{-m-1}$, $p_m 10^{-m} \leq x \leq (p_m+1)10^{-m}$

et (*) $\Rightarrow$ $p_{m+1}10^{-m-1} \leq x < (p_m+1)10^{-m}$

ie $p_{m+1} \times 10^{-1} < (p_m+1)$ ie $p_{m+1} < 10(p_m+1)$

ie $(p_{m+1}+1) \leq 10(p_m+1)$

$(p_{m+1}+1)10^{-m-1} \leq (p_m+1)10^{-m}$

ie $e_{m+1} \leq e_m$ ie $(e_m) \searrow$

Ensuite : $e_n - d_n = 10^{-n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ Donc suites adjacentes donc limites communes

et donc comme $d_n \leqslant x \leq e_m$ ie $d_n \to x$ et $e_n \to x$]

b) Développement décimal illimité d'un réel :

Etant donné un réel x, posons $a_0 = E(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = p_{n+1} - 10 p_n$

où (p_n) suite définie par le lemme précédent.

Thm : Pour tout réel x, la suite (a_n) d'entiers relatifs définie ci-dessus satisfait à :

i) $\forall n \geqslant 1$, $0 \leq a_n \leq 9$

ii) pour tout entier k, il existe un entier $n \geqslant k$ tq $a_n \neq 9$ (ie (a_n) est non stationnaire en 9)

iii) pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{n} a_n 10^{-k}$ est la valeur décimale approchée de x, à 10^{-n} près par défaut.

Déf : Toute suite (α_n) d'entiers, avec α_0 entier relatif et $0 \leq \alpha_n \leq 9$ pour tout $n \geqslant 1$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k 10^{-k} = x$, est son développement décimal illimité du réel x. Si de plus la suite (α_n) est non stationnaire en 9, on dit que le développement est propre.

[Démo thm : On a vu dans le lemme que $10 p_n \leq p_{n+1} < 10(p_n+1)$

ce qui donne $0 \leq a_{n+1} < 10$

iii) si on considère la suite (d_n) des valeurs décimales par défaut de x, on a $a_{n+1} = 10^{n+1} d_{n+1} - 10^{n+1} d_n$ et dc $d_{n+1} = d_n + a_{n+1} 10^{-n-1}$

Par récurrence on a le résultat.

ii) Par l'absurde s'il existe k tq $\forall n \geqslant k$ on a $a_n = 9$

alors $\forall m \geq k$ on aurait $d_m - d_k = \sum_{p=k+1}^{m} a_p 10^{-p} = \sum_{p=k+1} (10-1) 10^{-p}$

$= 10^{-k} - 10^{-m}$

ie $e_k = e_m$ absurde car e_k stric décroissante

car $e_m - e_k = (p_m + 1) 10^{-m} - (p_k + 1) 10^{-k}$

$= p_m 10^{-m} + 10^{-m} - p_k 10^{-k} - 10^{-k}$

$= p_m 10^{-m} - p_k 10^{-k} + 10^{-m} - 10^{-k}$

$= p_m 10^{-m} - p_k 10^{-k} + d_k - d_m$

$= \underbrace{\underbrace{p_m 10^{-m}}_{d_m} - d_m}_{= 0} + \underbrace{d_k - \underbrace{p_k 10^{-k}}_{d_k}}_{= 0} = 0$

dc $e_m = e_k$ absurde car e_k strict décroissante.

Rq: Il n'y a pas unicité du developpement décimal
ex 2 a pour dev $2,00\ldots,00$ et $1,99\ldots 99\ldots$

[Suites adjacentes : (lemme) :

Mq $\forall n$, $u_n \leq v_n$

$(v_n - u_n)_n$

$v_{n+1} - u_{n+1} = \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{<0 \text{ car } v_n \searrow} + (v_n - u_n) + \underbrace{(u_n - u_{n+1})}_{<0 \text{ car } u_n \nearrow}$

donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_n - u_n$ donc $(v_n - u_n)$ est une suite décroissante qui tend vers 0

ie $(v_n - u_n) \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$]

Exe :

$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ $b_n = a_n + \frac{1}{n.n!}$

$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc $a_n \nearrow$

$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!}$

$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)!(n+1)} = \frac{n^2+n+n-n^2-2n-1}{n(n+1)!(n+1)}$

$= \frac{-1}{n(n+1)!(n+1)} < 0$

dc $b_n \searrow$

$b_n - a_n = \frac{1}{n\,n!} \leq \frac{1}{n} \to 0$

Donc a_n et b_n st cv et cv vers la même limite. (cette limite est e).

Exercice : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, $u_0 = 0$

* $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x) = \sqrt{x+1}$ ie f croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc (u_n) croissante.

* Mq u_n majorée par 2 (Par récurrence) :

On suppose $u_n \leq 2$

$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ $0 \leq u_n + 1 \leq 3$

$\sqrt{u_n + 1} \leq \sqrt{3} \leq 2$

donc $u_{n+1} \leq 2$

Donc (u_n) croissante majorée dc elle converge vers l :

et de plus on a : $l = \sqrt{l+1}$ ie $l^2 = l + 1$ ie $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (car $l > 0$)

$u_0 = a$, $v_0 = b$ $a < b$

* On montre tout d'abord que $u_n < v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_n \searrow$ et $v_n \nearrow$

Récurrence sur n : $u_0 < v_0$ de vraie pour $n = 0$

On suppose que c'est vraie pour $n \in \mathbb{N}$

1er cas : $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ dc $u_{n+1} < v_{n+1}$ $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - v_n \leq 0$

$u_n \underset{HR}{\leq} v_n \Rightarrow \underset{u_{n+1}}{u_n} < v_{n+1} < v_n$

2^e^ cas : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$, alors $\underset{HR}{u_n < v_n}$ donc $\underbrace{u_n < u_{n+1}}_{u_{n+1}-u_n \geq 0} < v_n = v_{n+1}$

ie $u_{n+1} < v_{n+1}$

ie $v_{n+1} - v_n \geq 0$

Donc $P(n+1)$ vraie ie $v_n > u_n$ $\forall n$ $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = ?$

On a $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{2} = \dots = \frac{v_0 - u_0}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$]