Exposé 54 :

Définition de l'Hyperbole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.

0. Pré-Requis :

- projection, symétrie
- lignes de niveau.
- Barycentres
- Calculs vectoriels.

Cadre : $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$ plan affine euclidien.

I. Définition géométrique de l'Hyperbole :

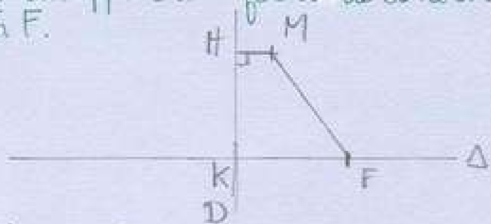
1) définition

Def : Soit D une droite du plan, $F \in \mathcal{P}$, $F \notin D$ et $e \in]1, +\infty[$. On appelle hyperbole $\mathcal{H}$ de foyer F, de directrice D et d'excentricité e l'ensemble des points :

$\mathcal{H}(F, D, e) = \{M \in \mathcal{P} \mid \frac{MF}{MH} = e\}$ où $H = proj_D^{\perp}(M)$

Def : On appelle axe focal de $\mathcal{H}$ la droite Δ perpendiculaire à D en K passant par F.

On note $\{K\} = D \cap \Delta$



2) Sommets :

Prop : Δ coupe $\mathcal{H}$ en deux points $A = Bar\{(F,1),(K,e)\}$ et $A' = Bar\{(F,1),(K,-e)\}$ appelés sommets de $\mathcal{H}$. Donc $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

[$M \in \mathcal{H} \cap \Delta \Leftrightarrow MF = e\,MK \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MK^2 \Leftrightarrow \underbrace{(\vec{MF} + e\vec{MK})(\vec{MF} - e\vec{MK}) = 0}_{\text{or 2 vects colinéaires}}$

$\Leftrightarrow \vec{MF} + e\vec{MK} = \vec{0}$ ou $\vec{MF} - e\vec{MK} = \vec{0}$

ie $M = Bar\{(F,1),(K,e)\}$ ou $M = Bar\{(F,1),(K,-e)\}$

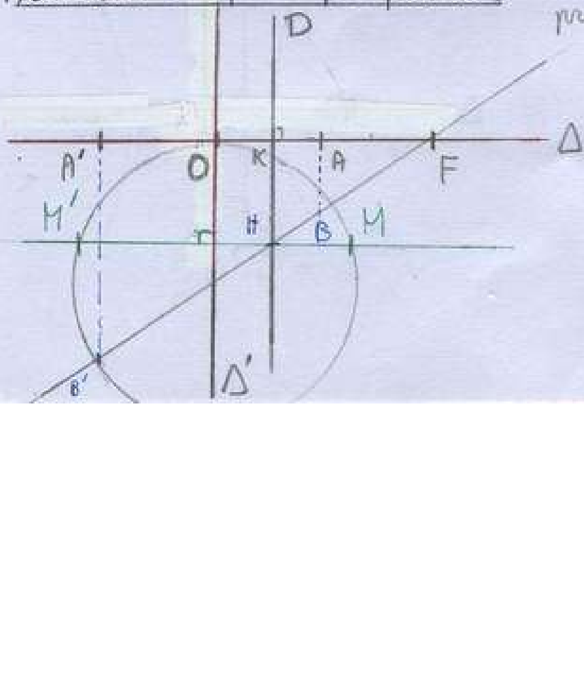
3) Symétries de $\mathcal{H}$:

Prop : Δ est axe de symétrie de $\mathcal{H}$ et Δ' la médiatrice de $[AA']$ est aussi axe de symétrie de $\mathcal{H}$.

O le milieu de $[AA']$ est centre de symétrie de $\mathcal{H}$.

Def : Δ' est appelé axe non focal de $\mathcal{H}$ et O est le centre de $\mathcal{H}$.

4) Construction point par point : Cette construction repose sur la démo précédente.



Soit $H \in D$

On trace $B = p(A)$ et $B' = p(A')$ où p proj sur (FH) // à (D)

On trace $\mathcal{C}_{[BB']}$.

On en déduit la construction de $M, M' \in \mathcal{H}$ tq $H = proj_D^{\perp}(M) = proj_D^{\perp}(M')$ (en traçant la perpendiculaire à D passant par H)

5) Deuxième couple (Foyer, directrice)

Prop: Toute hyperbole possède deux Foyers et deux directrices symétriques par rapport à son axe non focal.

[Repose sur les propriétés de la symétrie $s_{\Delta'}$ où Δ' axe non focal]

II Définition de l'hyperbole par équation réduite :

Prop: Soit $\mathcal{H}$ une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

Il existe un repère orthonormé dans lequel l'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour équation :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $b^2 = c^2 - a^2$

[Soit A, A' les sommets de $\mathcal{H}$ et O le centre de $\mathcal{H}$ (ie milieu de AA')

On pose $OA = OA' = a$ et $OF = c$

On considère le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{OF} = c\vec{i}$

$\begin{cases} \vec{AK} + e\,\vec{AK} = \vec{0} \\ \vec{A'K} - e\,\vec{A'K} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \vec{OF} + e\vec{OK} = (1+e)\vec{OA} \\ \vec{OF} - e\vec{OK} = (1-e)\vec{OA'} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{OF} = e\vec{OA} \\ \vec{OA} = e\vec{OK} \end{cases}$ dc $\underline{c = ea}$

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la directrice D a pour équation : $x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ car $K\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$

et $M(x,y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2 \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - \cancel{2xc} + c^2 + y^2 = e^2x^2 - \cancel{2c^2\frac{a^2x}{c}} + \frac{e^2a^4}{c^2}$ car $e = \frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow x^2(1-e^2) + y^2 = a^2 - c^2$ on a $a^2 \neq c^2$ car $e = \frac{c}{a} > 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2(1-e^2)}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ car $a^2 - c^2 = -b^2$ et $\frac{1-e^2}{a^2-c^2} = \frac{1}{a^2}$]

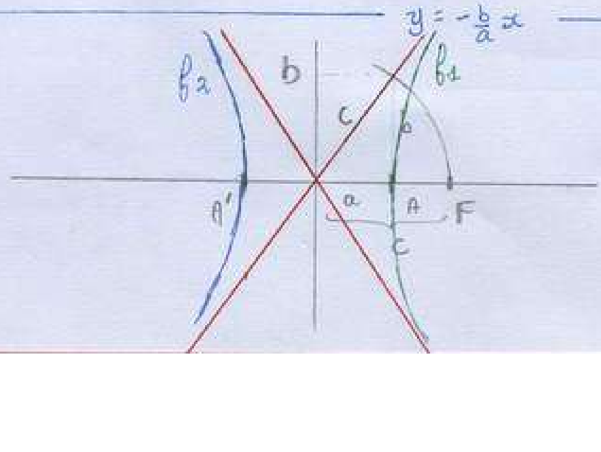
Déf: Cette équation est appelée équation réduite de $\mathcal{H}$.

Conséquences:

- L'équation réduite permet d'établir les symétries déterminées en 1ère partie.
- On en déduit un tracé de l'hyperbole : c'est la réunion des courbes représentatives des fonctions : $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ et $f_2 : x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

De plus f_1 admet pour asymptote en $+\infty$ $y = \frac{b}{a}x$ en $-\infty$ $y = -\frac{b}{a}x$

f_2 ——— $y = -\frac{b}{a}x$ ——— $y = \frac{b}{a}x$



car $c^2 = a^2 + b^2$

III Équivalence entre ces deux définitions :

Prop. Dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ toute courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (avec $a>0$ et $b>0$) est une hyperbole de foyer $F(c,0)$, de directrice associée $D: x=\frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e=\frac{c}{a}$ où $c=\sqrt{a^2+b^2}$

[Il suffit de reprendre les calculs de la proposition précédente].

IV Définition bifocale de l'hyperbole :

Prop : Soit $F, F' \in \mathcal{P}$ tq $F \neq F'$ et $FF'=2c$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $a<c$
L'ensemble $\{M \in \mathcal{P} \mid |MF-MF'|=2a\}$ est une hyperbole de foyers F, F' et d'excentricité $e=\frac{c}{a}$

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé tq $\vec{OF}=c\vec{i}$ et O milieu de FF'
$F(c,0)$ $F'(-c,0)$

$$|MF-MF'|=2a \Leftrightarrow MF^2+MF'^2-2MF.MF'=4a^2$$
$$\Leftrightarrow (x-c^2)+y^2+(x+c)^2+y^2-2MF.MF'=4a^2$$
$$\Leftrightarrow -2MF.MF'=4a^2-2x^2-2y^2-2c^2$$
$$\Leftrightarrow -MF.MF'=2a^2-x^2-y^2-c^2$$
$$\Leftrightarrow MF^2.MF'^2=(2a^2-x^2-y^2-c^2)^2$$
$$\Leftrightarrow ((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)=(2a^2-x^2-y^2-c^2)^2$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2xc+c^2+y^2)(x^2+2xc+c^2+y^2)=(2a^2-x^2-y^2-c^2)^2$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x^4}+\cancel{2x^2y^2}-2c^2x^2+\cancel{y^4}+\cancel{2c^2y^2}+\cancel{c^4}$$
$$=\cancel{x^4}+\cancel{2x^2y^2}-4a^2x^2+2c^2x^2+\cancel{y^4}-4a^2y^2+\cancel{2c^2y^2}+4a^4-4a^2c^2+\cancel{c^4}$$

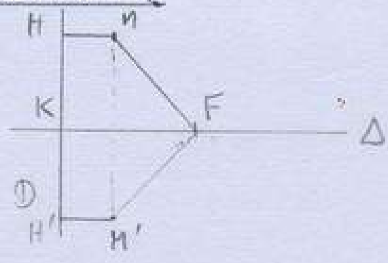
Calculatrice expand(...

$$\Leftrightarrow x^2(\cancel{4}c^2-\cancel{4}a^2)-\cancel{4}a^2y^2=\cancel{4}a^2c^2-\cancel{4}a^4$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

(en divisant par $a^2(c^2-a^2)$)

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{avec } b^2=c^2-a^2 \quad]$$

Prop : Δ axe de symétrie ?



[Soit $M \in \mathcal{H}$, dc $MF = e\,MH$.

On note $M' = s_\Delta(M)$ et $H' = \text{proj}^{\perp}_{\mathcal{D}}(M)$

Par conservation de l'orthogonalité et du parallélisme de s_Δ

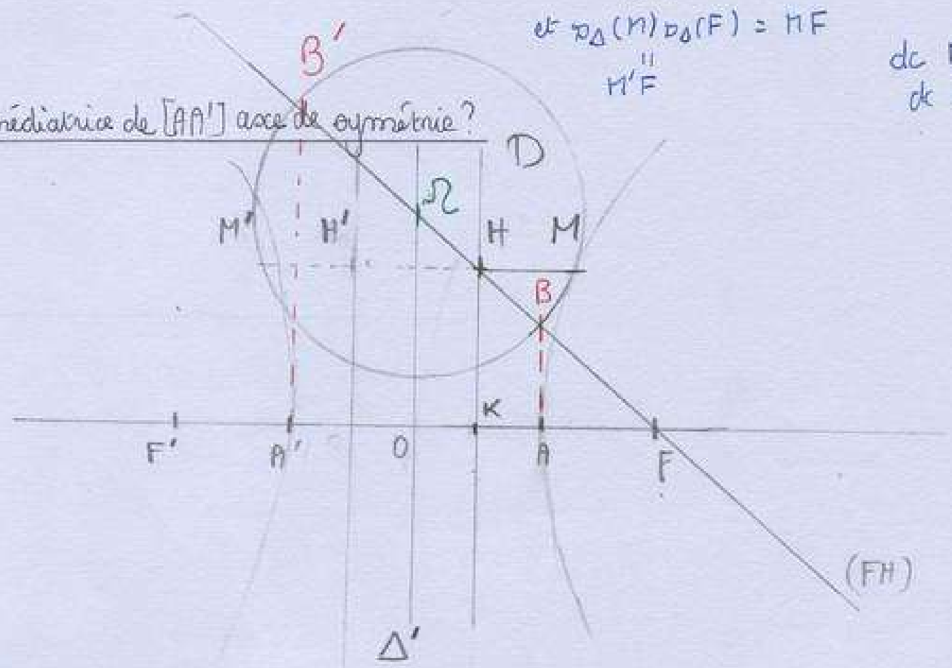
On a $s_\Delta(H) = H'$

Et donc comme s_Δ conserve distances. $\underbrace{s_\Delta(M)s_\Delta(H)}_{M'H'} = \underbrace{MH}_{\|}$

et $\underbrace{s_\Delta(M)s_\Delta(F)}_{M'F} = MF$

dc $M'F = M'H'$
dc $M' \in \mathcal{H}$.]

Δ' médiatrice de [AA'] axe de symétrie ?



$M' = s_{\Delta'}(M)$

or $MF = e\,MH$ $\quad M'F \overset{?}{=} e\,M'H'$

On considère p la projection sur la droite (FH) parallèlement à D

On considère $p(A) = B$ et $p(A') = B'$

p conserve barycentre donc $B = \text{Bar}\{(F,1),(H,e)\}$ et $B' = \text{Bar}\{(F,1),(H,-e)\}$

Le point H étant fixé, le lieu des points N de $\mathcal{H}$ tels que $\frac{NF}{NH} = e$ est

le cercle de diamètre [BB']

Soit Ω le centre de ce cercle alors $p(O) = \Omega$ car $\begin{cases} O \text{ milieu de } [AA'] \\ \downarrow p \qquad\qquad \downarrow p \\ \Omega \text{ ——— } [BB'] \end{cases}$

Par conséquent $\Delta' = (O\Omega)$ porte un diamètre du cercle.

On a $\frac{MF}{MH} = e$ donc $M \in \mathcal{C}_{[BB']}$ et donc $\boxed{s_{\Delta'}(M) = M' \in \mathcal{C}_{[BB']}}$

car Δ' diamètre du cercle...

dc $M' \in \mathcal{C}_{[BB']}$ $\Rightarrow$ $\frac{M'F}{M'H} = e$ ie $M' \in \mathcal{H}$]

Corollaire: O centre de symétrie de $\mathcal{H}$. ca $\Delta \cap \Delta' = \{O\}$ et Δ et Δ' axe de sym.

Asymptote de f_1:

$$f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\cancel{f_1(x) - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}|x|\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}x\left(\underbrace{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} - 1}_{\to 0}\right)}$$

$x \to +\infty$, $x > 0$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x = \frac{\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right)\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a}x\right)}{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a}x}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) - \frac{b^2}{a^2}x^2}{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a}x} = \frac{-b^2}{\underbrace{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a}x}_{\to +\infty}} \to 0^-$$

Donc f_1 en dessous de $\frac{b}{a}x$ en $+\infty$

en $-\infty$:

$$f_1(x) + \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a}x = \frac{\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a}x\right)\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right)}{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) - \frac{b^2}{a^2}x^2}{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x} = \frac{-b^2}{\frac{b}{a}\left(\underbrace{\sqrt{x^2 - a^2} - x}_{\xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty}\right)} \to 0^-$$

car $(-x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$

$\sqrt{x^2 - a^2} \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$

donc $-\frac{b}{a}x$ est asymptote à f_1 en $-\infty$.