Keppler définit l'ellipse comme la courbe décrite par les planètes autour du soleil.

Exposé 53 :

Définition de l'ellipse, géométriquement et par équa réduite équivalence entre ces définitions.

0_ Pré Requis

- projection orthogonale.
- calcul de distance.
- symétrie centrale axiale
- barycentres
- ligne de niveau $\frac{MA}{MB}$

Cadre : $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$ plan affine euclidien

I Définition géométrique de l'ellipse :

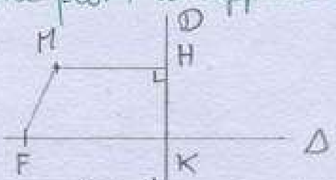
1) Définition :

Def : Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, $F \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$ et e un réel tel que $0<e<1$. On appelle ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e, l'ensemble

$\mathcal{E}(F, \mathcal{D}, e) = \{ M \in \mathcal{P} \mid \frac{MF}{MH} = e \}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Def : La droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F est appelée axe focal de $\mathcal{E}$

On note $\{K\} = \mathcal{D} \cap \Delta$



2) Sommets :

Prop : L'ellipse $\mathcal{E}$ coupe Δ en deux points distincts A et A' qui sont appelés sommets de $\mathcal{E}$. De plus $A = \text{Bar}\{(F,1),(K,e)\}$ et $A' = \text{Bar}\{(F,1),(K,-e)\}$

[$\{K\} = \mathcal{D} \cap \Delta$

$* \; M \in \mathcal{E} \cap \Delta \Leftrightarrow \frac{MF}{MK} = e \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MK^2$

$\Leftrightarrow (\underbrace{\vec{MF} + e\vec{MK}}).(\underbrace{\vec{MF} - e\vec{MK}}) = 0$

or ces deux vecteurs sont colinéaires

$\Leftrightarrow \vec{MF} + e\vec{MK} = \vec{0}$ ou $\vec{MF} - e\vec{MK} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow M = \text{Bar}\{(F,1),(K,e)\}$ ou $M = \text{Bar}\{(F,1),(K,-e)\}$]

3) Symétries de $\mathcal{E}$

Prop : Δ et la médiatrice Δ' de $[AA']$ sont axes de symétries de $\mathcal{E}$

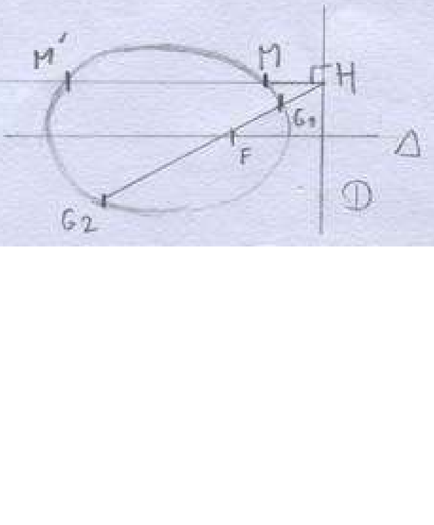
O le milieu de $[AA']$ est centre de symétrie de $\mathcal{E}$ [Pour Δ facile pour Δ' lignes de niveau]

Def : Δ' est appelé axe non focal de $\mathcal{E}$ et O est le centre de $\mathcal{E}$

4) Construction point par point :

Soit $\mathcal{E}(F, \mathcal{D}, e)$ et soit $M, M' \in \mathcal{E}$ tq $H = \text{proj}^{\perp}_{\mathcal{D}}(M) = \text{proj}^{\perp}_{\mathcal{D}}(M')$

Prop : soit $G_1 = \text{Bar}\{(F,1)(H,e)\}$ et $G_2 = \text{Bar}\{(F,1),(H,-e)\}$ alors $M, M' \in \mathcal{C}_{[G_1G_2]}$



[$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF = eMH$

$\Leftrightarrow MF^2 - e^2 MH^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{MF} - e\vec{MH})(\vec{MF} + e\vec{MH}) = 0$

$\Leftrightarrow (1+e)\vec{MG_1}.(1-e)\vec{MG_2} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MG_1} . \vec{MG_2} = 0$

$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}_{[G_1G_2]}$]

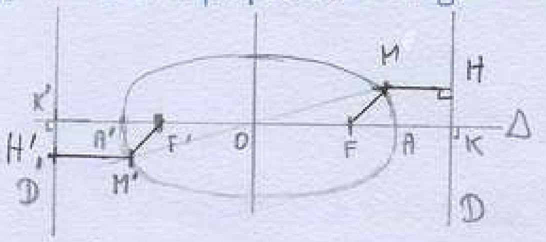
car $(MG_1) \perp (MG_2)$

5) Deuxième couple (Foyer, Directrice)

Soit $\mathcal{E}(D, F, e)$ de sommet A et A' et O le centre de l'ellipse.

Prop: Soit F' et D' les symétriques de F et D par rapport à O. L'ellipse $\mathcal{E}$ coïncide avec l'ellipse $\mathcal{E}'$ de foyer F', de directrice D' et d'excentricité e.

[On utilise les propriété de la symétrie de centre O]



II Définition de l'ellipse par équation réduite:

Prop: Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e. Il existe un repère orthonormé dans lequel l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour équation.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0, b > 0, a > b$

Def. On appelle cette équation, équation réduite de $\mathcal{E}$.

[Soit A, A' les sommets de $\mathcal{E}$ et O le centre de $\mathcal{E}$ (le milieu de $[AA']$)

On pose $OA = OA' = a$ et $c = OF$

On considère le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tq $\overrightarrow{OF} = c\vec{i}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK} = \vec{0} \\ \overrightarrow{A'F} - e\overrightarrow{A'K} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK} = (1+e)\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK} = (1-e)\overrightarrow{OA'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OA} = e\overrightarrow{OK} \end{cases} \text{ dc } \underline{c = ea}$$

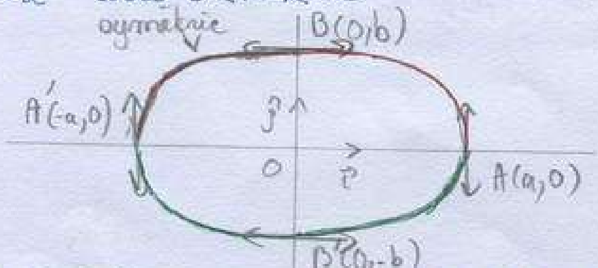
Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la directrice D a pour équation $x = \frac{a^2}{c}$ car D passe par $K(\frac{a}{e}, 0)$ et $\perp \Delta$ ($\frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$)

et $M(x,y) \in \mathcal{E} \iff MF^2 = e^2 MH^2 \iff (x-c)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$

$$\iff \underset{\text{après calculs}}{\dots} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } b^2 = a^2 - c^2 \quad]$$

Conséquences:

- L'équation réduite permet d'établir les symétries déterminées en 1ère partie
- On obtient un tracé précis de l'ellipse en considérant la fonction $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ avec $0 \leq |x| \leq a$



□ $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ $0 \leq |x| \leq a$

□ $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ $0 \leq |x| \leq a$

Exercice: Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un rom. $D: 2x + y = 1$ $F(-1, -1)$ $e = \frac{1}{2}$

Quelle est l'équation réduite de $\mathcal{E}(D, F, e)$

III Équivalence entre ces deux définitions :

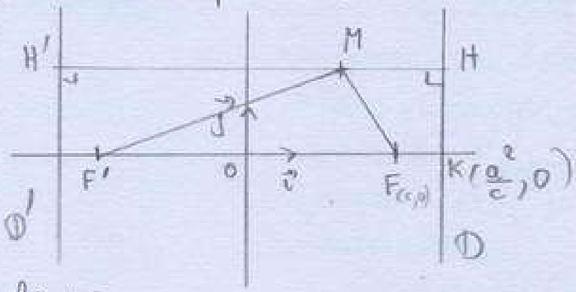
Thm : Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (avec $a>0$, $b>0$; $a>b$) est une ellipse de foyer $F(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ de directrice associée : $\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

[Poser $c = \sqrt{a^2-b^2}$ et $e = \frac{c}{a}$. de $F(c, 0)$ et $\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}$

On reprend le même calcul que dans la démonstration précédente]

IV Définition bifocale de l'ellipse :

Prop : Soit $F, F' \in \mathcal{P}$ tel que $FF' = 2c$, $a \in \mathbb{R}$ tq $a > c > 0$
L'ensemble des points $\{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$ est l'ellipse de foyer F et F'



Applications :

Construction point point par point :

Pour construire les points de l'ellipse définie par $MF + MF' = 2a$, il suffit de prendre les points d'intersection de deux cercles de centre F et F' et de rayon ℓ et ℓ' tq $\ell + \ell' = 2a$ et $\ell, \ell' \in [a-c, a+c]$ Rq : $a = OA$, $c = OF$ de $c < a$

Méthode du jardinier :

Construction d'une ellipse à l'aide d'une corde et de ces deux foyers F et F'

Rq : Si $a = b$, on ne parle pas d'ellipse car on a un cercle et $e = 0$ donc directrice rejetée à l'∞

Rq : Si on tombe sur la question $a < b$ on échange le rôle de a et b
On fait une rotation $\vec{i} \to \vec{j}$ et $\vec{j} \to -\vec{i}$ ...

Exercice : Ellipse.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $D : 2x + y = 1$ $F(-1,-1)$ $e = \frac{1}{2}$

Quel est l'équation réduite de la parabole de directrice D, de foyer F et d'excentricité e.

$$\mathcal{E} = \left\{ M \in P \text{ tq } \frac{MF}{MH} = e \right\} \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2$$

$M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $F \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow MF^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$

et MH^2

$$d(M, D) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$M(x, y)$ $4[(x+1)^2 + (y+1)^2] = \frac{(2x + y - 1)^2}{5}$ $(2^2 + 1^2)$

$\Leftrightarrow \ldots$

Démo de la proposition :

$MF + MF' = 2a$

$MF^2 + MF'^2 + 2MFMF' = 4a^2$

$4MF^2MF'^2 = (4a^2 - (MF^2 + MF'^2))^2$

$\ldots\ldots$

EXPOSE 53

Exposé 53 Démonstrations.

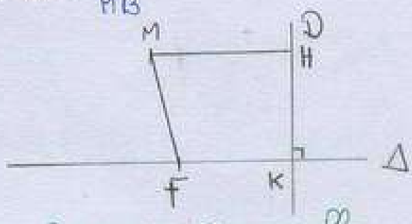
Définition de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite. Équivalence entre ces définitions.

Keppler définit l'ellipse comme la courbe décrite par les planètes autour du soleil.

0. Prérequis :

- projection orthogonale
- calcul de distance
- symétrie centrale, axiale
- barycentre
- ligne de niveau $\frac{MA}{MB}$

On se place dans $\mathcal{P}$ plan affine euclidien.



I. Définition géométrique de l'ellipse :

1) Définition

Def : Soit $\mathcal{D} \in \mathcal{P}$, $F \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$ et e un réel tel que $0 < e < 1$. On appelle ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e, l'ensemble
$\mathcal{E}(F, \mathcal{D}, e) = \{M \in \mathcal{P} \mid \frac{MF}{MH} = e\}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Def : La droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par F est appelée axe focal de $\mathcal{E}$. On note $\{K\} = \mathcal{D} \cap \Delta$

Prop : L'axe focal de $\mathcal{E}$ est axe de symétrie.

[Soit $M \in \mathcal{E}$ on a $s_\Delta(F) = F$ (car $F \in \Delta$), $s_\Delta(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \perp \Delta$) et $s_\Delta(M) = M'$ et $s_\Delta(H) = H'$.

On a $(MH) \perp \mathcal{D}$ donc $(M'H') \perp \mathcal{D}$ (propriété de la réflexion).

Donc $H' = \mathrm{proj}^{\perp}_{\mathcal{D}}(M')$

De plus $\left.\begin{array}{l} MH = M'H' \\ MF = M'F \end{array}\right\}$ (prop de la réflexion) $\Rightarrow \frac{MF}{MH} = e \Rightarrow \frac{M'F}{M'H'} = e$ Donc $M' \in \mathcal{E}$]

Prop : L'ellipse $\mathcal{E}$ coupe Δ en deux points distincts A et A' qui sont appelés sommets de $\mathcal{E}$. $A = \mathrm{Bar}\{(F,1), (K,e)\}$ et $A' = \mathrm{Bar}\{(F,1), (K,-e)\}$

[$K = \mathcal{D} \cap \Delta$

* $M \in \mathcal{E} \cap \Delta \iff \frac{MF}{MK} = e \iff MF^2 = e^2 MK^2$

$\iff \underbrace{(\vec{MF} + e\vec{MK})}_{} \cdot (\vec{MF} - e\vec{MK}) = 0$

Or ces deux vecteurs sont colinéaires

donc si $M \in \mathcal{E} \cap \Delta$ alors $\vec{MF} + e\vec{MK} = \vec{0}$ ou $\vec{MF} - e\vec{MK} = \vec{0}$

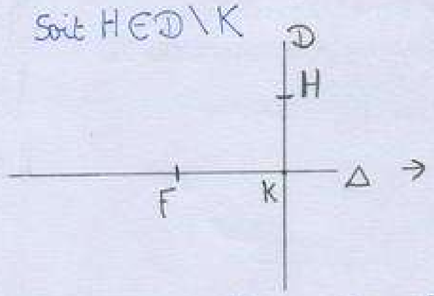
* Soient $A = \mathrm{Bar}\{(F,1), (K,e)\}$ et $A' = \mathrm{Bar}\{(F,1), (K,-e)\}$

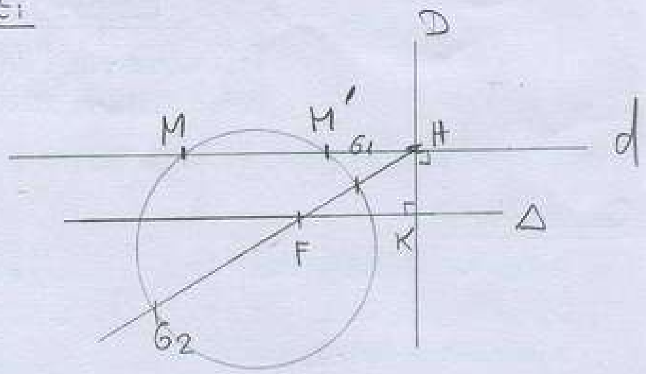
de plus comme $e \neq 1$ A et A' existent. (car si $e = 1$ alors $A = A'$)

et $\begin{cases} \vec{AF} + e\vec{AK} = \vec{0} \\ \vec{A'F} - e\vec{A'K} = \vec{0} \end{cases}$ donc $A \in \mathcal{E} \cap \Delta$ et $A' \in \mathcal{E} \cap \Delta$]

2. Construction point par point :

Soit $H \in D \setminus K$





Soit $G_1 = \text{Bar}\{(F,1),(H,e)\}$

$G_2 = \text{Bar}\{(F,1),(H,-e)\}$

On cherche $M, M' \in \mathcal{E}$ tq $\text{proj}^{\perp}_{D}(M) = \text{proj}^{\perp}_{D}(M') = H$.

Si on trace d la droite orthogonale à D passant par H alors

$\{M, M'\} = \mathcal{C}_{[G_1G_2]} \cap d$

[Soit $M \in \mathcal{E}$, alors $\frac{MF}{MH} = e \iff MF^2 - e^2 MH^2 = 0$

$\iff (\vec{MF} + e\vec{MH}) \cdot (\vec{MF} - e\vec{MH}) = 0$

$\iff (1+e)\vec{MG_1} \cdot (1-e)\vec{MG_2} = 0$

$\iff M \in \mathcal{C}_{[G_1G_2]}$]

3. Symétrie

Propriété : Δ et la médiatrice Δ' de [A, A'] sont axes de symétrie de $\mathcal{E}$

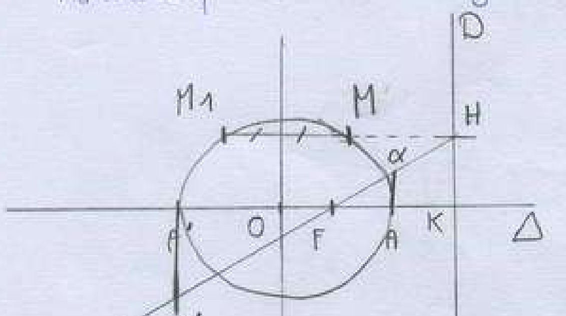
O le milieu de [AA'] est centre de symétrie de $\mathcal{E}$

Δ' est appelé axe non focal de $\mathcal{E}$

O est le centre de $\mathcal{E}$.

[On a déjà vu Δ axe de symétrie.

Montrons que Δ' est axe de symétrie de $\mathcal{E}$:



Soit $M \in \mathcal{E}$

Montrons que $M_1 = s_d(M) \in \mathcal{E}$.

soit p la projection sur (FH) parallèlement à D.

On a $p(H) = H$ et $p(F) = F$ et $p(K) = H$

$\alpha = p(A)$ et $\alpha' = p(A')$

p est une projection donc elle conserve les barycentres.

$A = \text{Bar}\{(F,1),(K,e)\}$ $\quad A' = \text{Bar}\{(F,1),(K,-e)\}$

$\alpha = \text{Bar}\{(F,1),(H,e)\}$ $\quad \alpha' = \text{Bar}\{(F,1),(H,-e)\}$

Le point H étant fixé, le lieu des points N de $\mathcal{P}$ tel que $\frac{NF}{NH} = e$ est le cercle de diamètre $[\alpha\alpha']$ (lignes de niveau).

Comme $\frac{MF}{MH} = e$, M est un point du cercle de diamètre $[\alpha\alpha']$

Soit Ω le centre de ce cercle alors $p(O) = \Omega$ (car O milieu de $[AA']$ donc $\Omega = p(O)$ est milieu de $[p(A)p(A')]$

Par conséquent $\Delta' = (O\Omega)$, d est donc un diamètre de ce cercle et $[\alpha\alpha']$

par conséquent $s_{\Delta'}(M) = M_1 \in \mathcal{C}_{[\alpha\alpha']}$ donc $\frac{M_1F}{M_1H} = e$ et donc $M_1 \in \mathcal{E}$]]

[[O est centre de symétrie car Δ et Δ' axe de symétrie et $\Delta \cap \Delta' = O$ et $\Delta \perp \Delta'$]]

Retour sur la ligne de Niveau :

$\frac{NF}{NH} = e \Leftrightarrow NF^2 = e^2 NH^2$ ie $(\vec{NF} + e\vec{NH})(\vec{NF} - e\vec{NH}) = \vec{0}$

ie $\forall N \in \mathcal{P}$ $(1+e)\vec{N\alpha} = \vec{NF} + e\vec{NH}$ et $(1-e)\vec{N\alpha'} = \vec{NF} - e\vec{NH}$

ie $(1+e)\vec{N\alpha}(1-e)\vec{N\alpha'} = 0$

ie $(N\alpha) \perp (N\alpha')$

ie $N \in \mathcal{C}_{[\alpha\alpha']}$

Conséquences : $F' = s_O(F)$ $D' = s_O(D)$ et $\mathcal{E}(D', F', e) = \mathcal{E}(D, F, e)$

II Définition de l'ellipse par équation réduite.

On considère le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et l'ellipse $\mathcal{E}(D, F, e)$

Soit A et A' les sommets de $\mathcal{E}$. et O le milieu de $[AA']$

On pose $a = OA$ $\quad c = OF$

$\vec{OF} + e\vec{OK} = (1+e)\vec{OA}$ car $A = \text{Bar}\{(F,1),(K,e)\}$

$\vec{OF} - e\vec{OK} = (1-e)\vec{OA'} = (e-1)\vec{OA}$ car $A' = \text{Bar}\{(F,1),(K,-e)\}$

d'où $\begin{cases} \vec{OF} = e\vec{OA} \\ \vec{OA} = e\vec{OK} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \frac{c}{a} \\ K\left(\frac{a^2}{c}, 0\right) \end{cases}$ car $x_A = e x_K \Leftrightarrow x_K = \frac{x_A}{e} = \frac{a \times a}{c}$

Prop : Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{E}(D, F, e)$ admet pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $b^2 = a^2 - c^2$ et $D : x = \frac{a^2}{c}$

[[$M(x,y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2$ $\quad F(c,0)$ et $H\left(\frac{a^2}{c}, y\right)$ car $K\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$ et $M(x,y)$

$\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2\frac{e^2a^2}{c}x + \frac{e^2a^4}{c^2}$ $\quad$ or $e = \frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + y^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx = a^2 - c^2$

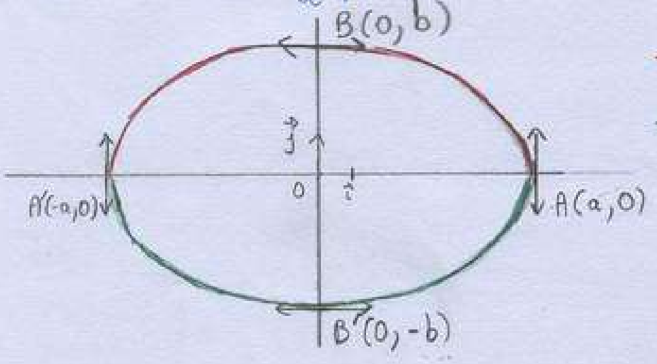
$\Leftrightarrow (1-e^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1-e^2}{a^2-c^2}x^2 + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{avec } b^2=a^2-c^2 \quad]$$

Thm: Soit $\mathcal{E}$ une ellipse, il existe $a>0, b>0$, $0<b<a$. Il existe $(O,\vec{i},\vec{j})$ dans lequel $\mathcal{E}$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. On appelle cette équation, équation réduite.

Conséquences:

- L'équation réduite permet d'établir les symétries déterminées en 1ère partie.
- On obtient un tracé précis de ~~la~~ l'ellipse en considérant la fonction $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ avec $0\leq x\leq a$.



— $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad 0\leq|x|\leq a$

— $y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad 0\leq|x|\leq a$

~~III Equivalence entre ces deux définitions~~

III Equivalence entre ces deux définitions.

· Thm: Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (avec $a>0, b>0$, $a>b$) est une ellipse de foyer $F(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, de directrice associée $D: x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ et d'excentricité $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

[Posons $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $e=\frac{c}{a}$. Notons $F(c,0)$ et D la droite d'équation $x=\frac{a^2}{c}$

Même calcul que précédemment

$\forall M\in\mathcal{E}$, $MF^2-e^2[d(M,D)]^2 = \dots = 0$

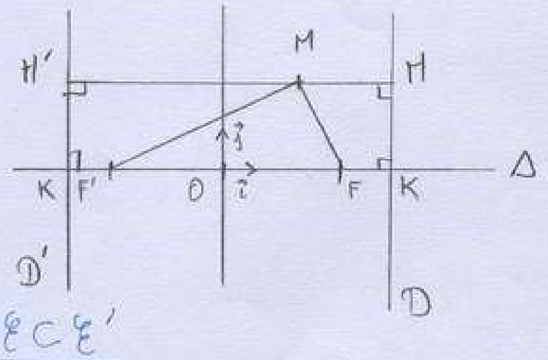
donc $\forall M\in\mathcal{E}$ · $MF=e\,d(M,D)$ et donc M est élément de $\mathcal{E}$ ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.]

Rq: Si $a=b$ alors $\mathcal{E}$ est un cercle de centre O et de rayon a.

IV Définition bifocale de l'ellipse :

Prop : Soient $F, F' \in \mathcal{P}$, tels que $FF' = 2c$, $a \in \mathbb{R}$ tq $a > c > 0$.
L'ensemble des points $\{M \in \mathcal{P} : MF + MF' = 2a\}$ est l'ellipse de foyers F et F'.

$\square$



$\mathcal{E} = \mathcal{E}(D, F, e)$
$\mathcal{E}' = \{M \in \mathcal{P},\ MF + MF' = 2a\}$
$FF' = 2c \quad a > c > 0$

1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$

$M \in \mathcal{E} \iff \dfrac{MF}{MH} = e = \dfrac{MF'}{MH'} \iff MF = eMH$ et $MF' = eMH'$

d'où $(MF + MF') = e(MH + MH') = e\,HH'$

or on a déjà vu que $K\left(\dfrac{a^2}{c}, 0\right)$ donc $HH' = \dfrac{2a^2}{c}$

d'où $(MF + MF') = e\,\dfrac{2a^2}{c}$. or $e = \dfrac{c}{a}$

$= 2a$

2) $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$

O est le milieu de $[FF']$ et $\vec{i} = \dfrac{1}{c}\vec{OF}$

$F(c, 0)$ $F'(-c, 0)$ et $M(x, y) \in \mathcal{E}'$

$MF^2 = (x-c)^2 + y^2$
$MF'^2 = (x+c)^2 + y^2$

$MF^2 - MF'^2 = -4cx$
$MF^2 - MF'^2 = (MF + MF')(MF - MF') = 2a(MF - MF')$

d'où $MF - MF' = \dfrac{-4cx}{2a} = -\dfrac{2cx}{a}$

or $MF + MF' = 2a$

d'où $MF = a - \dfrac{cx}{a}$ et $MF' = a + \dfrac{cx}{a}$

On peut faire plus calculatoire.

$MF^2 + MF'^2 + 2MF.MF' = 4a^2$
$(MF^2 + MF'^2 - 4a^2)^2 = 4MF^2MF'^2$

Bon résultat avec expand calculatrice

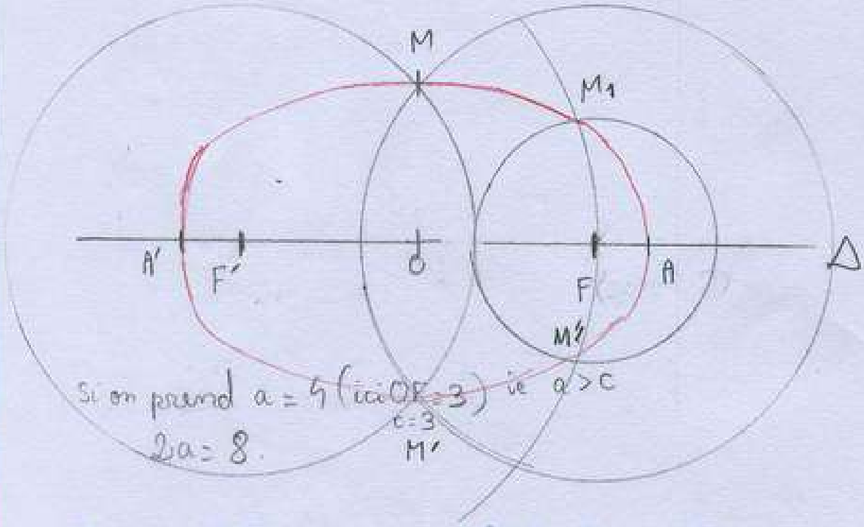
$$\left.\begin{array}{l} MF^2 = \left(a - \dfrac{cx}{a}\right)^2 \\ \text{et } MF^2 = (x-c)^2 + y^2 \end{array}\right] \Rightarrow a^2 - \cancel{2cx} + \dfrac{c^2x^2}{a^2} = x^2 - \cancel{2cx} + c^2 + y^2$$

$$\iff \dfrac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \iff M \in \mathcal{E} \quad \blacksquare$$

~~Application~~

Construction point par point :

Pour construire les points de l'ellipse définie par $MF + MF' = 2a$, il suffit de prendre les points d'intersection de deux cercles de centre F et F', de rayon ρ et ρ' tq $\rho + \rho' = 2a$, et $\rho, \rho' \in [a-c, a+c]$



Si on prend $a = 4$ (ici $OF = 3$) ie $a > c$

$c = 3$

$2a = 8$.

Autre méthode, dite méthode du « jardinier » qui est basée sur l'utilisation d'une ficelle de longueur $2a$ fixée en F et F'

II $\quad MF'^2 + MF^2 + 2MF.MF' = 4a^2$

$$4MF^2MF'^2 = \left(4a^2 - (\quad)^2\right)^2$$

$=$

$\vdots$

$\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$

II

Exercice : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $D : 2x + y = 1$ $\quad F(-1, -1)$ $e = \frac{1}{2}$

Quel est l'équation réduite de l'ellipse de directrice D, de Foyer F et d'excentricité e.