# Exposé 52

Définitions de la parabole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions. Construction de la tangente et de la normale en un point.

## 0- Pré-Requis :

- projection, réflexion.
- produit scalaire.

Cadre : $(P, \vec{P})$ plan affine euclidien.

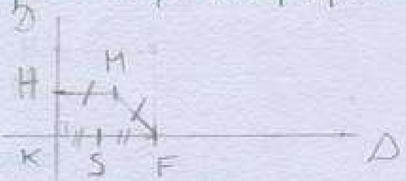
## I Définition géométrique de la parabole :

### 1) Définition

Def : Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$ et $F \in \mathcal{P}$, $F \notin \mathcal{D}$. On appelle parabole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ l'ensemble $\Gamma(F, \mathcal{D}) = \{M \in \mathcal{P} \mid MF = MH\}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Def. On appelle axe focal la droite $\Delta$ qui passe par F et qui est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

$\{K\} = \mathcal{D} \cap \Delta$ et $FK = p$ paramètre de la parabole.



### 2) Propriétés :

Prop : i) $\Gamma(F, \mathcal{D}) \neq \emptyset$

ii) $\Delta$ est axe de symétrie de $\Gamma$

[ i) S le milieu de [KF], appartient à $\Gamma$ donc $\Gamma \neq \emptyset$

ii) On utilise les propriétés des réflexions : conservation des distances et de l'orthogonalité

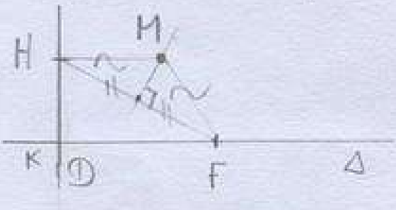
soit $M \in \Gamma$, on pose $M' = s_\Delta(M)$ et $H' = proj_{\mathcal{D}}^{\perp}(M')$

- $MF = M'F$ car $F \in \Delta$ ie $s_\Delta(F) = F$ et $s_\Delta$ conserve distances.
- $s_\Delta(H) = H'$ car $s_\Delta$ conserve l'orthogonalité des droites.
- $MH = M'H'$ car __________ distances.

ie $M'F = M'H'$ ie $M' \in \Gamma$ ]

Rq : S est appelé sommet de la parabole.

### 3) Construction point par point :



Soit $H \in \mathcal{D} \setminus \{K\}$

On trace la médiatrice (HF)

et on trace la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par H. On note M l'intersection de ces deux droites.

On donc par définition de M, $H = proj_{\mathcal{D}}^{\perp}(M)$ et $MH = MF$ car $M \in$ médiatrice de [HF]

donc $M \in \Gamma(\mathcal{D}, F)$ ...

On en déduit la construction de la parabole.

Exercice : Déterminer une parabole connaissant sa directrice et deux points appartenant à la parabole.

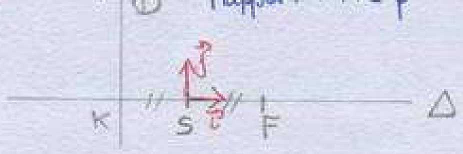
## II Définition analytique de la parabole :

### 1) Equation réduite :

**Thm :** Soit $\Gamma(F,D)$ une parabole de paramètre $p$ et de sommet $S$. Dans le repère orthonormé $(S,\vec{i},\vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{\vec{SF}}{\|SF\|}$ et $\vec{j}$ vecteur unitaire directeur de $D$. $\Gamma$ a pour équation dans $(S,\vec{i},\vec{j})$ : $y^2 = 2px$

On appelle cette équation réduite de $\Gamma$.

Rappel : $FK = p$




[ Soit $M(x,y) \in \Gamma$ et $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

$M \in \Gamma \iff MF = MH$ où $H = proj^{\perp}_{D}(M)$

$\iff MF^2 - MH^2 = 0 \iff (x-x_F)^2 + (y-\underbrace{y_F}_{0})^2 - (x-x_H)^2 - \underbrace{(y-y_H)^2}_{0} = 0$

$\iff \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$ Rq $x_H = -\frac{p}{2}$ car $x_F = \frac{p}{2}$ ; $x_K = -\frac{p}{2}$ ; $D : x = -\frac{p}{2}$

$\iff y^2 + \left(\cancel{x} - \frac{p}{2} - \cancel{x} - \frac{p}{2}\right)\left(x - \cancel{\frac{p}{2}} + x + \cancel{\frac{p}{2}}\right) = 0$

$\iff y^2 - p2x = 0$

$\iff \boxed{y^2 = 2px}$ ]

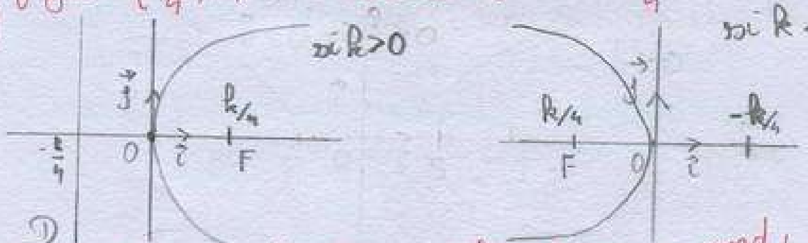
Rq : $x = \frac{y^2}{2p}$, $\Delta$ est l'unique axe de symétrie ($\Delta : y = 0$ prop : de $x \mapsto x^2$)

### 2) Problème réciproque :

**Thm :** Soit $R(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé, $k \in \mathbb{R}^*$. $\Gamma = \{M(x,y) \mid y^2 = kx\}$

$\Gamma$ est la parabole de foyer $F\left(\frac{k}{4}, 0\right)$ de Directrice $D : x = -\frac{k}{4}$ et de paramètre $p = \frac{|k|}{2}$

$S = O$



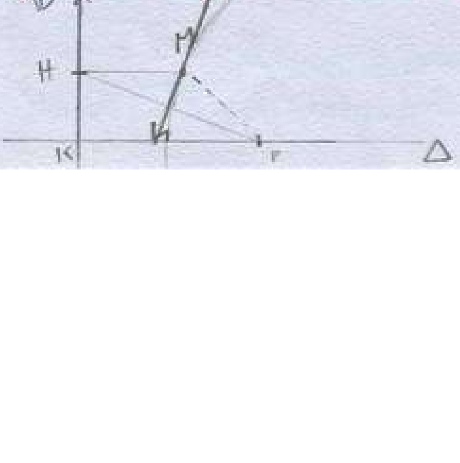

**Thm :** La courbe représentative des fonctions polynômes du 2nd degré en $x$ : $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole.

## III Tangentes et normales à la parabole :

### 1) Tangentes :

Soit $\Gamma$ une parabole de foyer $F$ et de directrice $D$, et $H$ le projeté orthogonal d'un point $M \in \Gamma$ sur $D$.

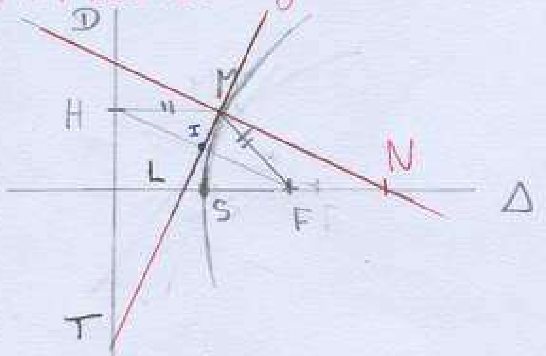
**Thm :** La tangente en $M$ à la parabole $\Gamma$ coïncide avec la médiatrice de $[FH]$. Cette tangente est aussi la bissectrice intérieur du triangle $MFH$ en $M$.



[ Dans un repère orthonormal convenablement choisi $\Gamma$ admet pour équation 2/2
$y^2 = 2px$.
On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longrightarrow \left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$ qui fournit une paramétrisation de la conique
On en déduit le vecteur directeur $\vec{u}$ de la tangente à $\Gamma$ en $M$.
Puis on montre que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$ ]

**Thm :** La tangente à $\Gamma$ en $M$ coupe $\Delta$ en un point $L$ tel que $\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{HM}$

**Thm :** La tangente à $\Gamma$ en $M \notin \Delta$ coupe $D$ en $T$ tel que le triangle $MFT$ soit rectangle en $F$.




[ Pour le i) On montre que $HMFS$ est un losange dans le cas $M \notin \Delta$
et cas $M \in \Delta$ trivial.
i) Or $HTM$ et $TMF$ sont sym / tangente ]

## 2) Normale

**Thm :** La normale en $M$ à $\Gamma$ est la bissectrice extérieure du triangle $MFH$ en $M$

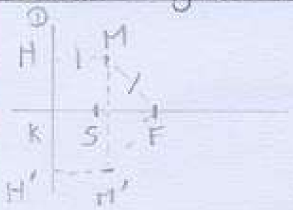
[ La bissectrice intérieure et l'extérieure sont orthogonales ]

**Thm :** La normale à $\Gamma$ en $M \notin \Delta$ coupe $\Delta$ en un point $N$ tel que $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{HM}$

[ Mq $HMNF$ est un parallélogramme en montrant que ses côtés opposés sont parallèles.
Seule difficulté : Montrer l'existence de $N$. ]

# Exposé 52 : Démonstrations :

## $\Delta$ axe de symétrie de $\Gamma$.




$\Delta$

Soit $M \in \Gamma$ ie on a $MF = MH$ où $H = proj_{D}^{\perp}(M)$

Soit $M' = s_\Delta(M)$ et $H' = proj_{D}^{\perp}(M')$

• On a $MF = M'F$ $\left( \text{car } \underset{M'}{s_\Delta(M)}\,\underset{F}{s_\Delta(F)} = MF \quad \text{car } F \in \Delta \right)$

• $s_\Delta(H) \overset{?}{=} H'$ $\{H\} = D \cap D_1$ où $D_1$ = droite $\perp$ à $D$ passant par $M$

$\{s_\Delta(H)\} = s_\Delta(D) \cap s_\Delta(D_1)$

$= D \cap D_2$ où $D_2$ = droite $\perp$ à $D$ passant par $M'$

car $D \perp \Delta$

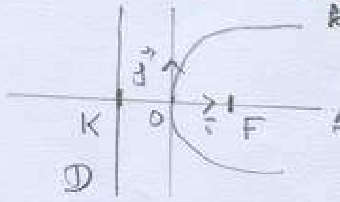
car $s_\Delta$ conserve l'orthogonalité

$\Rightarrow s_\Delta(H) = H'$ ie $MH = M'H'$ (car $s_\Delta$ conserve distance).

**Thm (Réciproque) :** $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ rom, $k \in \mathbb{R}^*$ $\Gamma = \{M(x,y) \mid y^2 = kx\}$

$\Gamma$ parabole de Foyer $F\left(\frac{k}{4}, 0\right)$ de directrice $D : x = -\frac{k}{4}$ et de paramètre $p = \frac{|k|}{2}$

[[




$k > 0$ (hypothèse)

$\{K\} = D \cap \underset{(O,\vec{i})}{\Delta}$

on retrouve $KF = p = \frac{k}{2}$

$K\left(-\frac{k}{4}, 0\right)$ et $F\left(\frac{k}{4}, 0\right)$

comment retrouver l'énoncé du thm

Soit $M(x,y) \in \Gamma$ ie $y^2 = kx$ $D : x = -\frac{k}{4}$ et $F\left(\frac{k}{4}, 0\right)$

$H = proj_{D}^{\perp}(M)$ ie $H\left(-\frac{k}{4}, y\right)$

$MH^2 = \left(-\frac{k}{4} - x\right)^2 + (y-y)^2 = x^2 + \frac{kx}{2} + \frac{k^2}{16}$ car $y^2 = kx$

$MF^2 = \left(\frac{k}{4} - x\right)^2 + (-y)^2 = y^2 + \frac{k^2}{16} + x^2 - \frac{kx}{2} = x^2 + \frac{kx}{2} + \frac{k^2}{16} = MH^2$

Donc $MF = MH$ et donc $\Gamma$ est une ellipse de Foyer $F\left(\frac{k}{4}, 0\right)$ et de directrice $D : x = -\frac{k}{4}$

Rq : $p = KF = \frac{2|k|}{4} = \frac{|k|}{2}$ (Valeur absolue car distance $> 0$ !!!)

# Exposé 52 Démonstration bis.

Définition de la parabole, géométriquement et par équation réduite, équivalence entre ces définitions. Construction de la tangente et de la normale en un point.

## 0 Pré-requis :

- projection, reflexion
- produit scalaire.

On se place dans $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$ un plan affine euclidien.

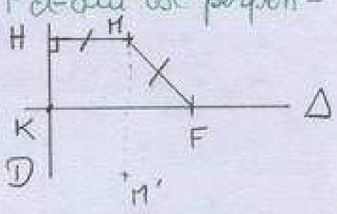
## I Définition géométrique :

### 1) Définitions :

Def : Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$ et $F \in \mathcal{P}$, $F \notin \mathcal{D}$
On appelle parabole de foyer $F$, de directrice $\mathcal{D}$ l'ensemble
$\Gamma(F,\mathcal{D}) = \{M \in \mathcal{P} \text{ tq } MF = MH\}$ où $H = proj^{\perp}_{\mathcal{D}}(M)$

Def : On appelle axe focal la droite $\Delta$ qui passe par $F$ et qui est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

$K = \mathcal{D} \cap \Delta$ et $FK = p$ paramètre de la parabole.




### 2) Propriétés :

Prop

i) $\Gamma(F,\mathcal{D}) \neq \emptyset$

[ Soit $S$ le milieu de $[KF]$ on a donc $SF = SK$ donc $S \in \Gamma$ donc $\Gamma \neq \emptyset$ ]

$S$ est appelé sommet de $\Gamma$

ii) $\Delta$ est axe de symétrie de $\Gamma$.

[ Soit $M \in \Gamma(F,\mathcal{D})$

$M' = s_\Delta(M)$ et $H' = s_\Delta(H)$ $F \in \Delta$ donc $s_\Delta(F) = F$

$s_\Delta$ est une reflexion donc elle conserve les distances $MF = s_\Delta(MF) = s_\Delta(M)s_\Delta(F)$
$= M'F$

De même $MH = s_\Delta(MH) = s_\Delta(M)s_\Delta(H) = M'H'$

De plus on a $(MH) \perp \mathcal{D}$ donc $s_\Delta((MH)) \perp s_\Delta(\mathcal{D})$ car $s_\Delta$ conserve l'orthogonalité

or $s_\Delta(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ car $\mathcal{D} \perp \Delta$

donc $s_\Delta(MH) = (M'H') \perp \mathcal{D}$ donc $H' = proj_{\mathcal{D}}(M')$

donc on a $M'F = M'H'$ où $H' = proj^{\perp}_{\mathcal{D}}(M')$

donc $M' \in \Gamma(F,\mathcal{D})$ donc $\Delta$ est axe de symétrie. ]

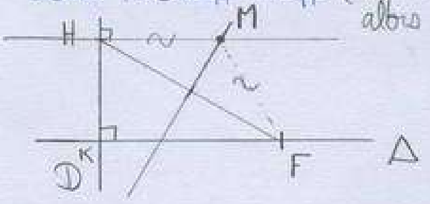
## 3. Construction point par point.

Soit $H$ un point de la directrice $\mathcal{D}$. et $\Delta_H$ la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $H$ et $\mathcal{D}_H$ la médiatrice $[FH]$

On a donc $M \in \mathcal{D}_H$ (car si $M \in \Gamma$ alors $MF = MH$)

De plus on cherche $M$ tq $H = proj^{\perp}_{\mathcal{D}}(M)$ donc $M \in \Delta_H$

Donc $M \in \Delta_H \cap \mathcal{D}_H$ (Rq : cette intersection est non vide car si $\mathcal{D}_H \parallel$ à $\Delta_H = (HM)$ alors $(HF) \perp \Delta$ alors $F \in \mathcal{D}$ absurde)

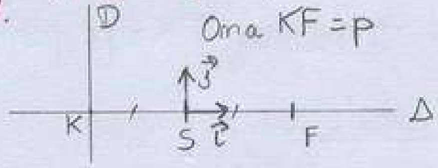



Rq : $K = \mathcal{D} \cap \Delta$

# II Définition analytique de la parabole.

## 1) Equation réduite:

**Thm:** Soit $\Gamma(F,\mathcal{D})$ une parabole de paramètre $p$ de sommet $S$. Dans le repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{\vec{SF}}{\|\vec{SF}\|}$ et $\vec{j}$ vecteur unitaire directeur de $\mathcal{D}$. $\Gamma$ a pour équation dans $(S,\vec{i},\vec{j})$ : $y^2 = 2px$.
On l'appelle equation réduite de $\Gamma$.




[ Soit $M(x,y) \in P$
et $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

$M \in \Gamma \iff MF = MH$ où $H = proj^{\perp}_{\mathcal{D}}(M)$

$$\iff MF^2 - MH^2 = 0 \iff (x - x_F)^2 + (y - \underset{0}{y_F})^2 - (x - x_H)^2 - \underbrace{(y - y_H)^2}_{0} = 0$$

$$\iff \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

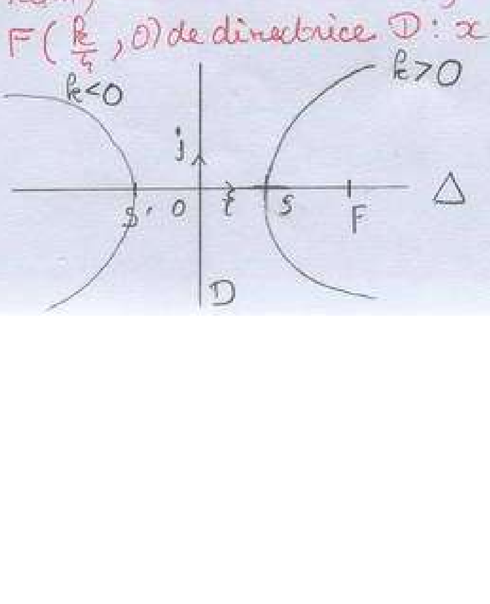
$$\iff y^2 - 2px = 0$$

$$\iff y^2 = 2px \quad ]$$

Rq : $x = \frac{y^2}{2p}$ ; $\Delta$ est l'unique axe de symétrie.

## 2) Problème réciproque.

**Thm:** Soit $R(O,\vec{i},\vec{j})$ un rom, $k \in \mathbb{R}^*$. $\Gamma = \{M(x,y) : y^2 = kx\}$
$\Gamma$ est la parabole de foyer $F\left(\frac{k}{4}, 0\right)$ de directrice $\mathcal{D} : x = -\frac{k}{4}$ et de paramètre $p = \frac{|k|}{2}$



I Soit $M(x,y)$ tq $y^2 = kx$ $\quad D : x = -\frac{k}{4}$ $\quad F\left(\frac{k}{4}, 0\right)$

$H = \text{proj}_D^\perp(M)$ donc $H\left(-\frac{k}{4}, y\right)$

$$MH^2 = \left(x + \frac{k}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{xk}{2} + \frac{k^2}{16}$$

$$MF^2 = \left(x - \frac{k}{4}\right)^2 + y^2 = x^2 - \frac{xk}{2} + \frac{k^2}{16} + y^2 \quad \text{or } y^2 = kx$$

$$MF^2 = x^2 + \frac{xk}{2} + \frac{k^2}{16} = MH^2$$

Donc $MF = MH$ ∎

<u>Thm</u> : La courbe représentatrice des fonctions polynômes du $2^{nd}$ degré en $x$ : $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole.

I $y = ax^2 + bx + c$

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\underbrace{Y = aX^2}_{\text{équation d'une parabole (d'après le théorème précédent)}} \quad \text{avec } \begin{cases} Y = y + \frac{\Delta}{4a} \\ X = x + \frac{b}{2a} \end{cases}$$ ∎

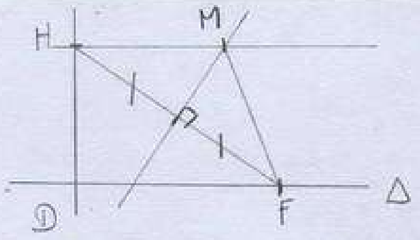
dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ avec $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

## III Tangentes et normales à la parabole :

### 1) Tangentes :

Soit $\Gamma$ une parabole de foyer $F$ et de directrice $D$, et $H$ le projeté orthogonal d'un pt $M \in \mathcal{P}$ sur $D$.

<u>Thm</u> : La tangente en $M$ à la parabole $\Gamma$ coïncide avec la médiatrice de $[FH]$. Cette tangente est aussi la bissectrice intérieure du triangle $MFH$ en $M$.



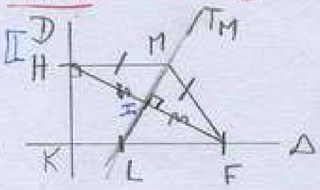

Dans un repère orthonormal où $\Gamma$ admet l'équation $y^2 = 2px$,
l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto \left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$

définit une paramétrisation de $\Gamma$. La tangente $T_M$ à $\Gamma$ en $M = f(t)$ sera dirigée par $\vec{u} = \overrightarrow{f'(t)} = \left(\frac{t}{p}, 1\right)$. Comme $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et $H\left(-\frac{p}{2}, t\right)$

on trouve $\vec{u} \cdot \overrightarrow{HF} = \left(\frac{t}{p}, 1\right) \cdot (p, -t) = 0$

Donc $T_M$ est perpendiculaire à $(FH)$ et passe par $M$.
Or $M$ est équidistant de $H$ et $F$ (car $M \in \Gamma$) donc $T_M$ est la médiatrice de $[FH]$
Donc $T_M$ est bien la bissectrice intérieure de $\widehat{HMF}$ (car $T_M$ médiatrice de $(HF)$ donc $s_{T_M}(H) = F$ et $s_{T_M}(F) = F$ / ]

**Thm :** La tangente à $\Gamma$ en $M$ coupe $\Delta$ en point $L$ tel que $\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{HM}$

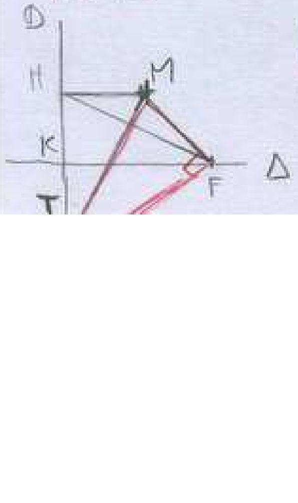



[ On note $L = T_M \cap \Delta$
* Si $M \notin \Delta$, $MFLH$ est un losange ?
On a déjà $(ML) \perp (HF)$
$I$ est milieu de $[HF]$

La symétrie $s$ par rapport à $I$ transforme $(MH)$ en une droite parallèle à $(MH)$ passant par $s(H) = F$, ie c'est $\Delta$. $s(M)$ sera donc à la fois sur $(MI)$ et sur $\Delta$, donc $s(M) = L$
$\Rightarrow I$ milieu de $[ML]$

Donc $(HMLF)$ est un ▱ qui a ses diagonales $\perp$ donc c'est un losange
Donc $\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{HM}$
* Si $M \in \Delta$, alors $M$ est le sommet de $\Gamma$ donc le milieu de $[KF]$ donc $L = M$ et d'où le résultat. ]

**Thm :** La tangente à $\Gamma$ en $M \notin \Delta$ coupe $D$ en $T$ tel que le triangle $MFT$ soit rectangle en $F$.



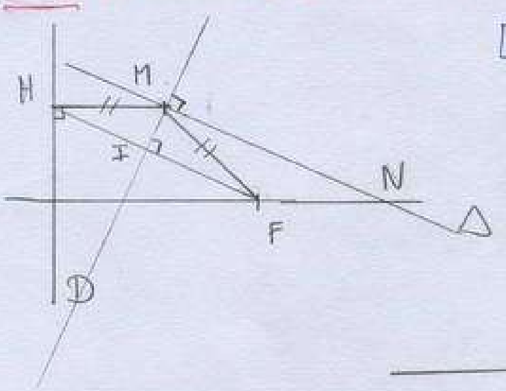

[ Le triangle $MHT$ et le triangle $MFT$ sont symétriques par rapport à la tangente $(TM)$ ]

## 2) Normales.

**Thm :** La normale en $M$ à $\Gamma$ est la bissectrice extérieure du triangle $MFH$ en $M$

[ On a déjà vu que $T_M$ est la bissectrice intérieure de $MFH$ en $M$ de plus normale en $M$ est perpendiculaire à $T_M$ passant par $M$. On a déjà vu que la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure sont perpendiculaires. ]

**Thm :** La normale à $\Gamma$ en $M \notin \Delta$ coupe $\Delta$ en un point $N$ tel que $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{HM}$



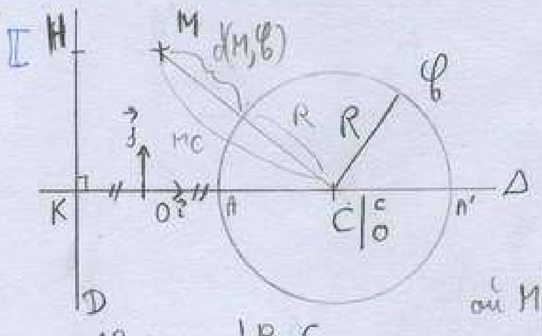

[ Si $M \notin \Delta$ alors $T_M \not\perp \Delta$ et donc la normale à $\Gamma$ en $M$ n'est pas parallèle à $\Delta$
Soit $N$ l'intersection de la normale et de $\Delta$.
On a $(HM) // (FN)$
et $(HF) \perp (T_M)$ et $(MN) \perp (T_M)$
$\Rightarrow (MN) // (HF)$
Donc $HMNF$ est un parallélogramme ]

---

### Exercices :

On se donne une droite $D$ dans le plan $P$ et un cercle tel que $\mathcal{C} \cap D = \emptyset$
On regarde le lieu géométrique des points équidistants de la droite et du cercle.

[




Soit $\mathcal{C}(C,R)$, on trace $\Delta$ la droite orthogonale à $D$ passant par $C$. $\Delta \cap D = K$
On note $O$ le milieu de $[KA]$
On considère le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$C \begin{vmatrix} c \\ 0 \end{vmatrix}$

$$d(M,\mathcal{C}) = \Big| \underbrace{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}_{MC} - R \Big| \quad \text{où } M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\phantom{MC}}_{d(M,\mathcal{C})}$

Rq : $A \begin{vmatrix} R-c \\ 0 \end{vmatrix}$ et $K \begin{vmatrix} R-C \\ 0 \end{vmatrix}$

Soit $H = proj^{\perp}_{D}(M)$ $\quad H \begin{vmatrix} R-c \\ y \end{vmatrix}$

$$d(M,D) = MH = \sqrt{(x-x_H)^2 + \underbrace{(y-y_H)^2}_{0}} = (x - x_H) = |x + c - R|$$

$$d(M,\mathcal{C}) = d(M,D) \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} - \cancel{R} = x + c - \cancel{R} \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2}$$

$$\boxed{y^2 = 4xc}$$

Rq comme $M$ se situe entre le cercle $\mathcal{C}$ et la droite $D$
Donc on peut enlever les valeurs absolues
Puisque c'est positif.

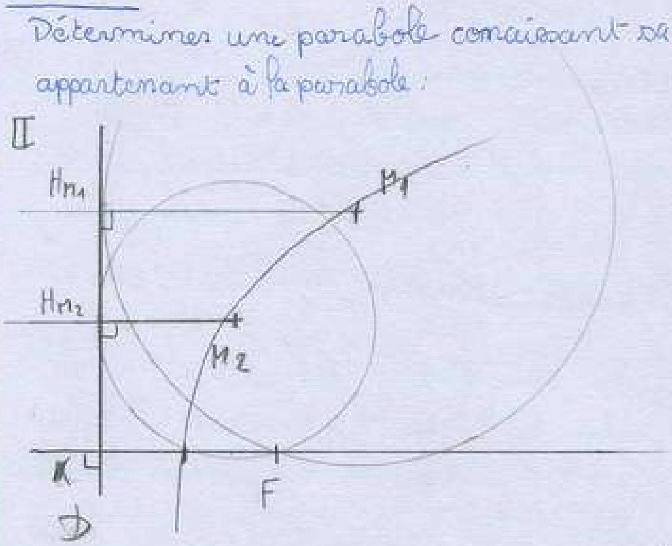
on élève au carré

Donc le lieu géométrique est une parabole ]

Exercice :

Déterminer une parabole connaissant sa directrice et deux points appartenant à la parabole :

II




On a $M_1F = H_{M_1}F$ où F est le foyer de l'ellipse.

et $M_2F = H_{M_2}F$

Donc $F \in \mathcal{C}(M_1, M_1H_{M_1}) \cap \mathcal{C}(M_2, M_2H_{M_2})$

De plus on obtient F et le sommet de la parabole ... II