Exposé 51 :

Niveau : Programme complémentaire.

Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan. Vecteur dérivé et tangent, Interprétation cinématique.

Cadre : $(P, \vec{P})$ plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0 - Pré Requis :

- Calculs vectoriels.

I Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan :

Soit f, g des fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Définitions :

Def : L'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(t)$ du plan de coordonnées $(f(t), g(t))$ où $t \in I$ est une courbe paramétrée.

Def : $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \\ t \in I \end{cases}$ est une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$

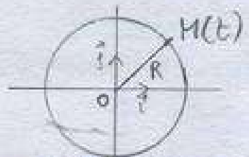
* t est appelé paramètre

* Le point $M(t)\,(f(t), g(t))$ est appelé point de paramètre t.

* On a de plus $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$

Exemple : $\mathcal{C}(O, R)$

$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \\ t \in [0, 2\pi[\end{cases}$



Rq : Une représentation paramétrique définie une courbe unique mais une même courbe admet plusieurs représentations paramétriques

Exemple : $y = -2x + 5$. Cette droite a pour représentation paramétrique :

$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -2t + 5 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ et $\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = -2t + 3 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

2) Point de vue cinématique :

t est une variable de temps. Ainsi à chaque instant $t \in I$, la position d'un mobile $M(t)$ est repérée par l'expression de ses coordonnées en fonction du temps. $M(t) = (f(t), g(t))$

Dans ce cas la courbe paramétrée d'équation paramétrique $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \\ t \in I \end{cases}$ s'appelle la trajectoire du mobile.

II Vecteur dérivé tangent à une courbe paramétrée :

1) Définition :

Soit f, g dérivables sur I.

Soit $\mathcal{E}$ une courbe paramétrée de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \\ t \in I \end{cases}$

Def : On appelle vecteur dérivée de $\mathcal{E}$ en t_0 le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = f'(t_0)\vec{i} + g'(t_0)\vec{j}$

Def : On appelle tangente à $\mathcal{E}$ au point $M(t_0)$ la droite $D\Big(\underbrace{M(t_0)}_{\text{passant par } M(t_0)}, \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)}_{\text{vect directeur}}\Big)$

si $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$

Exemple : $\mathcal{C}(O,R)$ de rep para $\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \\ t \in [0, 2\pi[\end{cases}$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}$$

$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \neq \vec{0}$ $\left(\text{car } \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \right\| = R \neq 0\right)$ est le vecteur directeur de la tangente en $M(t)$ à $\mathcal{E}$.

2) Point de vue Cinématique :

t variable de temps. $M(t)$ la position du mobile en fonction du temps.
$\mathcal{E}$ est la trajectoire de M

a) Vitesse instantanée.

$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$ est le vecteur vitesse instantanée de M en t.

$\varphi(t) = \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right\|$. Si φ est constante on dira que le mouvement est uniforme. Si φ est croissante (resp décroissante) alors le mouvement est accéléré (resp ralenti)

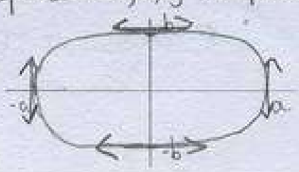
b) Accélération :

$\vec{\gamma}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = f''(t)\vec{i} + g''(t)\vec{j}$ est le vecteur d'accélération de M en t

III Application :

1) L'ellipse $\mathcal{E}$

Prop : L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a<b)$ dans repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \\ t \in [0, 2\pi[\end{cases}$



$$\left[\!\left[\frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \right]\!\right]$$

tangentes : $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi[$

On a donc aux points $M(0)$ et $M(\pi)$ une tangente verticale

——— $M(\frac{\pi}{2})$ et $M(-\frac{\pi}{2})$ ——— horizontale.

2) Exercice

Construire la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(2t) \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

* Tout d'abord on va réduire l'intervalle d'étude :

- Etude sur $[-\pi, \pi[$ car les fcts sont 2π-périodiques.
- $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ donc courbe symétrique par rapport à l'origine

$\Rightarrow$ Etude sur $[0, \pi[$

- $\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}$ courbe symétrique par rapport à $(O, \vec{i})$

$\Rightarrow$ Etude sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ (car $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$, $\pi - t \in [0, \frac{\pi}{2}[$)

* Etude des variations :

$x'(t) = \cos t$

$y'(t) = 2\cos 2t$

(Rq x et y st dérivables sur $\mathbb{R}$)

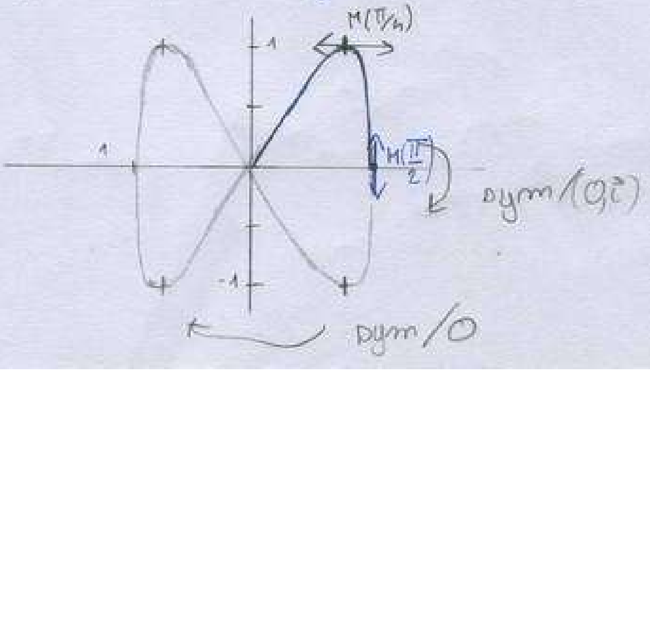
Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2t) = 0$

$\Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$x'(t)$	1	$+$	$\sqrt{2}/2$	$+$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}/2$	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-2



Tangente horizontale en $M(\pi/4)$ et verticale en $M(\frac{\pi}{2})$

⚠ si $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = \vec{O}$ pas de tangente ?

On dit que $M(t_0)$ est un point stationnaire.

On fait la formule de taylor et la tangente est dirigée par le vecteur $\frac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0)$ où $\frac{d'\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = \frac{d^{(2)}\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0) = \dots = \frac{d^{p-1}\overrightarrow{OM}}{dt^{p-1}}(t_0) = \vec{O}$

$$\text{et } \frac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0) \neq \vec{O}$$