Exposé 5 :

Probabilité conditionnelle, indépendance de deux évènements (on se limitera au cas où l'ensemble est fini). Applications à des calculs de probabilité.

0- Pré Requis :

- Définitions et propriétés élémentaires des probabilités.
- Notion ensemblistes.
- Opérations dans un ensemble et partition d'un ensemble.

I- Probabilité Conditionnelle :

1) Exemple :

On considère un lycée de 400 élèves. $\text{card}\,\Omega = 400$.

On a la situation suivante :

	Anglais A	Espagnole
Garçons G	130	60
Filles F	140	70

$P(E\cap G)$; $P(E\cap F)$

Le tableau représente les élèves du lycée. On voit la répartition fille garçon et on regarde la première langue étudiée par les élèves.

On a $P(E) = \frac{130}{400}$ $\qquad P(E \text{ sachant } F) = \frac{70}{210}$

et $P(E\cap F) = \frac{70}{400}$ $\qquad P(F) = \frac{210}{400}$ de $\frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{70}{210}$ =

2) Définition et théorème :

Déf : Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A un évènement tq $P(A) \neq 0$ et B un évènement quelconque. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé le réel noté $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P_A(B)$

Thm : $\forall A \subset \Omega$ tq $P(A) \neq 0$, $P_A : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, $B \mapsto \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ est une probabilité sur Ω.

[$P_A(B) \geq 0$ par définition.

$P_A(\Omega) = \frac{P(A\cap\Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

$(A\cap B_1)\cap(A\cap B_2) = \emptyset$

$\forall B_1, B_2 \subset \Omega$ tq $B_1\cap B_2 = \emptyset$ $P_A(B_1\cup B_2) = \frac{P(A\cap(B_1\cup B_2))}{P(A)} = \frac{P((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2))}{P(A)} = \frac{P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2)}{P(A)}$

$= P_A(B_1) + P_A(B_2)$]

Rq : Si $A\subset B$ on a $P(B|A) = 1$ si $A\cap B = \emptyset$ alors $P(B|A) = 0$

Exercice :

Une urne contient 8 boules, 5 rouges et 3 jaunes. On prélève successivement et sans remise 2 boules.

Probabilité de tirer 2 boules rouges ?

Ω = ensemble des couples de 2 boules. $P(A\cap B) = P(B|A)\times P(A) = \frac{4}{7}\times\frac{5}{8}$

A : " 1er boule tirée rouge "

B : " 2ème ——————— "

3) Formules de probabilités totales

Déf : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n évènements $\{B_1, \dots, B_n\}$ constituent un système complet d'évènements si $\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad B_i \neq \emptyset \\ \forall i \neq j \quad B_i \cap B_j = \emptyset \\ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \end{cases}$

$B_i \subset \Omega, \forall i$

Thm : (Probabilité totale) : Soit $\{B_1, \dots, B_n\}$ un système complet d'évènements et A un évènement quelconque alors $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \times P(A \mid B_i)$

[Vient de $A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)}_{\text{union disjointe}}$]

Conséquence : Formule de Bayes :

Soit $\{B_1, \dots, B_n\}$ un système complet d'évènements et $A \subset \Omega$ tq $P(A) \neq 0$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(A \mid B_j)}$$

Exercice : Utilisation des probabilités totales :

U_1 : 1 boule rouge et 5 boules jaunes

U_2 : 3 — et 1 —

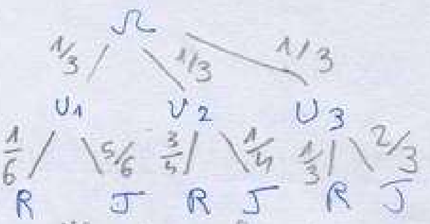
U_3 : 1 — et 2 —

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.
Proba pour que la boule tirée soit rouge ?

[U_1 : "L'urne choisie est U_1"
U_2 : " — U_2
U_3 : " — U_3

R : la boule tirée est rouge
J : la boule tirée est jaune.

Schéma représentant la situation :



Rq : Il y a trois chemins qui mènent à rouge donc $\Leftrightarrow$ on somme les probas des 3

$$P(R) = \sum_{i=1}^{3} P(U_i) \times P(R \mid U_i)$$

Proba Totale car $\bigcup_{i=1}^{3} U_i = \Omega$ et $U_i \cap U_j = \emptyset$ ...

$$P(R) = \frac{1}{3} \times P(R \mid U_1) + \frac{1}{3} \times P(R \mid U_2) + \frac{1}{3} \times P(R \mid U_3)$$

$$\boxed{P(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}$$

Exercice : Utilisation de la Formule de Bayes :

5‰ d'une population est malade.

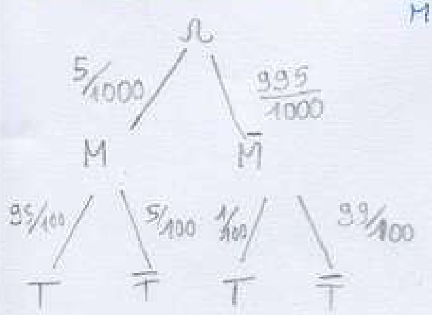
95% des personnes malades ont un test positif.

99% des personnes saines ont un test négatif.

a) Quelle est la probabilité qu'une personne ait un test positif ?

b) — ayant un test positif soit réellement malade ?

Schéma de la situation : M : "être malade" $\bar{M}$: "pas malade" T : "Test positif" $\bar{T}$: "Test négatif".



a) $P(T) = P(T \cap \Omega) = P(M) \times P(T/M) + P(\bar{M})P(T/\bar{M})$

or $\Omega = M \cup \bar{M}$ — proba totale

$$= \frac{5}{1000} \times \frac{95}{100} + \frac{995}{1000} \times \frac{1}{100} = \frac{147}{10000}$$

b) $P(M|T) = \dfrac{P(M) \times P(T/M)}{P(\bar{M})P(T/\bar{M}) + P(M) \times P(T/M)} = \dfrac{5/1000 \times 95/100}{147/10000}$

II Indépendance de deux évènements :

Intuitivement deux évènements sont indépendants en probabilité si la réalisation de A n'influe pas sur la probabilité que B soit réalisé.
~~C'est~~ ce qui correspondrait à $P(B|A) = P(B)$ (avec $P(A) \neq 0$)

Déf : On dit que deux évènements A et B sont indépendants si
$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

Exemple : Lancer une pièce 2 fois de suite. Le 2ème lancer ne dépend pas du premier

Prop : A et B indépendants $\Leftrightarrow$ A et $\bar{B}$ indépendants.
$\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ et B ———
$\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ et $\bar{B}$ ———

[On montre la 1ère équivalence :

$A = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

$P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)\,P(\bar{B})$
car A et B indpt

On remonte pour $\Leftarrow$]

Exercice d'application :

On lance successivement deux dés parfaits.
A " le résultat du 1er dé est impair "
B " le résultat du 2e dé est pair
C " les résultats des 2 dés sont de même parité "

$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$P(B \cap C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A \cap C)$

Formule de Bayes :

$\{B_1, \dots, B_n\}$ syst est complet. $A \subset \Omega$ tq $P(A) \neq 0$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad P(B_i | A) = \frac{P(B_i) \times P(A | B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(A | B_j)}$$

$$\left[\!\left[\; P(B_i | A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A | B_i) \times P(B_i)}{P(A)} \underset{\text{Thm}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{P(A | B_i) \times P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(A | B_j)} \; \right]\!\right]$$