LECON N° ~~46~~ Exposé 49.

Réflexion de l'espace échangeant deux points donnés : plan médiateur, régionnement associé. Etude des isométries de l'espace ayant une droite de points invariants.

Niveau TS

Cadre $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}})$ espace affine euclidien

Prérequis Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$

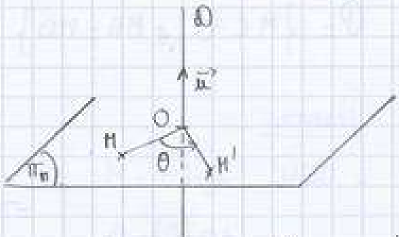
Definition : La reflexion de plan $\mathcal{P}$ est l'application

$$s_{\mathcal{P}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$M \longmapsto M' \ / \ \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH} \quad \text{où } H = \text{proj}_{\mathcal{P}}^{\perp}(M)$$

Propriété $s_{\mathcal{P}}$ est une isométrie involutive et $\text{inv}(s_{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}$

Definition La rotation de l'espace d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\vec{u}$ et d'angle θ est l'application :

$$r(\mathcal{D}, \vec{u}, \theta) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$M \longrightarrow M'$$



Alors si $M \in \mathcal{D}$ $M' = M$

si $M \notin \mathcal{D}$ soit (Π_M) le plan passant par M orthogonal à $\mathcal{D}$

M' vérifie $\begin{cases} OM = OM' & \text{avec } O = \mathcal{D} \cap (\Pi_M) \\ M' \in (\Pi_M) \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \ (2\pi) & \text{dans } (\Pi_M) \end{cases}$

Propriété Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans sécants, $s_{\mathcal{P}'} \circ s_{\mathcal{P}}$ est une rotation.

Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$

1- Réflexion de l'espace échangeant 2 points donnés

1) Plan médiateur

Soit I le milieu de [AB]

Soit $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à (AB) passant par I

$s_{\mathcal{P}}(A)=B$ et $s_{\mathcal{P}}(B)=A$

Soit Q un plan tel que $s_Q(A)=B$ donc $s_Q(B)=A$

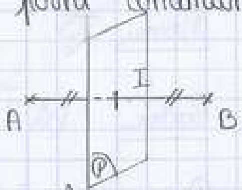
I milieu de [AB] donc $s_Q(I)=I$

$I \in \mathcal{P}\cap Q$

De plus $(AB)\perp Q$ et $(AB)\perp \mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ et Q sont donc parallèle et ils ont un point commun

donc $\mathcal{P}=Q$ et $s_{\mathcal{P}}=s_Q$



Théorème _ Définition

Il existe une unique réflexion de l'espace échangeant 2 points donnés.

Le plan de cette réflexion est appelé plan médiateur de [AB]

1.2 Caractérisation du plan médiateur $\mathcal{P}$ de [AB]

Théorème

$\mathcal{P}=\{M\in\mathcal{E} \ , MA=MB\}$

Preuve

- $M\in\mathcal{P}$ $\left.\begin{array}{l} s_{\mathcal{P}}(M)=M \\ s_{\mathcal{P}}(A)=B \end{array}\right\} \Rightarrow MA=MB$ car $s_{\mathcal{P}}$ isométrie
- $M\in\mathcal{E}$ tq $MA=MB$

$MA^2-MB^2=0 \iff (\vec{MA}-\vec{MB})(\vec{MB}+\vec{MA})=0$

$\iff 2\vec{BA}\cdot\vec{MI}=0$

donc M appartient au plan de vecteur normal $\vec{BA}$ passant par I

$M\in\mathcal{P}$

1.3 Régionnement associé

Définition et théorème

$\mathcal{E}_A=\{M\in\mathcal{P}, [AM]\cap\mathcal{P}=\emptyset\}$ est le demi-espace ouvert de frontière $\mathcal{P}$ contenant A

$\mathcal{E}'_A=\{M\in\mathcal{P}, [AM[\cap\mathcal{P}\neq\emptyset\}$ est le demi espace ouvert de frontière $\mathcal{P}$ ne contenant pas A

De plus $\mathcal{E}_A$, $\mathcal{E}'_A$ et $\mathcal{P}$ constituent une partition de $\mathcal{E}$

Remarques

- Si $C \in \mathcal{E}_A$ alors $\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_A$, si $C \in \mathcal{E}'_A$ alors $\mathcal{E}_C = \mathcal{E}'_A$
- $\mathcal{E}_B$, $\mathcal{E}'_B$ et $\mathcal{P}$ constituent une partition de $\mathcal{E}$.

Conséquences $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}'_B$ et $\mathcal{E}_B = \mathcal{E}'_A$

I milieu de $[AB]$ donc $[AB[\cap \mathcal{P} = I$ donc $B \in \mathcal{E}'_A$

donc $\mathcal{E}_B = \mathcal{E}'_A$

de plus $[BA[\cap \mathcal{P} = I$ donc $A \in \mathcal{E}'_B$ donc $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}'_B$

Théorème

$\mathcal{E}_A = \{M \in \mathcal{E} \;/\; MA < MB\}$

$\mathcal{E}_B = \{M \in \mathcal{E} \;/\; MA > MB\}$

Preuve

. Soit $M \in \mathcal{E}_A$, donc $M \in \mathcal{E}'_B$ càd $[BM[\cap \mathcal{P} \neq \emptyset$

Soit $J = [BM[\cap \mathcal{P}$ $\quad MA \leqslant MJ + JA$ $\quad J \in \mathcal{P}$ donc $JA = JB$

d'où $MA \leqslant MJ + JB$ $\quad M, J$ et B sont alignés donc $MA \leqslant MB$

si $MA = MB$ alors $M \in \mathcal{P}$ contraire à l'hypothèse donc

$MA < MB$ d'où $\mathcal{E}_A \subset \{M \in \mathcal{E} \;/\; MA < MB\}$ de m $\mathcal{E}_B \subset \{M \in \mathcal{E} \;/\; MB < MA\}$

. Soit $M \in \mathcal{E}$ $\quad MA < MB$

on suppose que $M \notin \mathcal{E}_A$ alors $M \in \mathcal{P}$ ou $M \in \mathcal{E}'_A = \mathcal{E}_B$

si $M \in \mathcal{P}$ alors $MA = MB$ faux

si $M \in \mathcal{E}_B$ alors $MB < MA$ faux

donc $M \in \mathcal{E}_A$

$\mathcal{E}_A = \{M \in \mathcal{E} \;/\; MA < MB\}$

de même $\mathcal{E}_B = \{M \in \mathcal{E} \;/\; MB < MA\}$

2 Isométrie de l'espace ayant une droite de points invariants

Soit f une isométrie de l'espace.

2.1 Théorèmes préliminaires

Théorème 1

Si f a au moins 4 pts fixes non coplanaires alors $f = Id_{\mathcal{E}}$

Théorème 2

Si f a au moins 3 pts fixes non alignés alors $f = Id_{\mathcal{E}}$ ou $f = s_{(ABC)}$

Preuve

. Th 1 A, B, C, D non coplanaires pts fixes de f

A, B, C, D forment un repère affine

$M \in \mathcal{E}$ $\exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tq $a+b+c+d \neq 0$

et $M = \text{Bary}\{(A,a),(B,b)(C,c)(D,d)\}$

f est une isométrie donc une application affine donc

$f(M) = \text{Bary}\{(f(A),a)(f(B),b)(f(C),c)(f(D),d)\}$

$= \text{Bary}\{(A,a)(B,b)(C,c)(D,d)\} = M$

$\forall M \in \mathcal{E}$ $f(M) = M$ donc $f = Id_{\mathcal{E}}$

. Th 2 si f a un autre pt fixe non coplanaires avec A, B, C

$f = Id_{\mathcal{E}}$ on suppose que $f \neq Id_{\mathcal{E}}$

Soit $s_{(ABC)}$ la réflexion de plan (ABC)

Soit $D \in \mathcal{E}$, tq $D \notin (ABC)$ alors $f(D) \neq D$

soit $D' = f(D) \neq D$

$DA = D'A$, $DB = D'B$, $DC = D'C$, donc A, B et C appartiennent au plan médiateur de $[DD']$

Donc (ABD) est le plan médiateur de $[DD']$

d'où $D' = s_{(ABC)}(D)$

on a donc $s_{(ABC)} \circ f$ qui admet 4 pts fixes non coplanaires

donc $s_{(ABC)} \circ f = Id_{\mathcal{E}}$ donc $f = s_{(ABC)}$

2.2 Théorème

Si f a exactement une droite de points invariants (AB) $A \neq B$ alors f est la composée de 2 reflexions de plans sécants suivant la droite (AB), donc f est une rotation d'axe (AB)

Preuve

$M \in \mathcal{E} \setminus (AB)$ $\quad M \neq f(M)$

$f(A) = A$ donc $AM = Af(M)$

$f(B) = B$ donc $BM = Bf(M)$

$(AB) \subset \mathcal{P}$ avec $\mathcal{P}$ plan médiateur de $[M f(M)]$

Posons $g = s_{\mathcal{P}} \circ f$ g est une isométrie, g fixe les point A, B et M non alignés

Soit $g = Id_{\mathcal{E}}$ alors $f = s_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{P}$ invariant par f impossible

Soit $g = s_{(ABM)}$

donc $g = s_{(ABM)}$ et $f = s_{\mathcal{P}} \circ s_{(ABM)}$

$\mathcal{P} \cap (ABM) = (AB)$ $\quad \forall M \in \mathcal{E}/(AB)$

donc f est une rotation d'axe (AB)

Réciproque

Si f est la composée des réflexions de plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ alors f admet exactement une droite de points invariants

Preuve

$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}$

. si $M \in \mathcal{D}$ $\quad M = s_{\mathcal{P}'}(M)$ et $M = s_{\mathcal{P}}(M)$ donc $M = f(M)$

. si $M \notin \mathcal{D}$ si $M = f(M)$ alors $s_{\mathcal{P}'}(M) = s_{\mathcal{P}}(M)$

si $M \neq s_{\mathcal{P}}(M)$ alors $\mathcal{P}$ médiateur de $[M s_{\mathcal{P}}(M)]$

d'où $\mathcal{P}$ médiateur de $[M s_{\mathcal{P}'}(M)]$

$M \neq s_{\mathcal{P}'}(M)$ donc $\mathcal{P}'$ médiateur de $[M s_{\mathcal{P}'}(M)]$

donc $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ impossible donc $M = s_{\mathcal{P}}(M) = s_{\mathcal{P}'}(M)$

donc $M \in \mathcal{P}$ et $M \in \mathcal{P}'$ donc $M \in \mathcal{D}$ faux

donc $f(M) \neq M$

3. Application

Déterminer les reflexions et les rotations qui conservent un tétraèdre regulier.

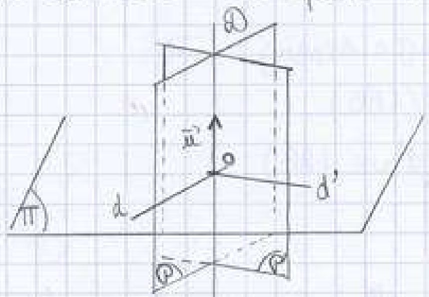
Remarque

On montre que la composée de 2 reflexions de plans sécants est une rotation d'après la composée de 2 reflexions plane qui est une rotation

- Réciproque

Soit r la rotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\vec{u}$ d'angle θ

On considère un plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$. On oriente $\mathcal{D}$



Soit Π un plan orthogonal à $\mathcal{D}$

Soit $\{O\} = \Pi \cap \mathcal{D}$

Soit $d = \Pi \cap \mathcal{P}$

On construit $\mathcal{P}'$ un plan contenant $\mathcal{D}$ tq $(d, d') = \alpha \ (\Pi)$

avec $d' = \mathcal{P}' \cap \Pi$

- Soit $M \in \Pi$

$M \xrightarrow{s_{\mathcal{P}}} M' \xrightarrow{s_{\mathcal{P}'}} M''$ $\quad M' \in \Pi_M \quad M'' \in \Pi_M$

donc si on note $s_d : \Pi \longrightarrow \Pi$ et $s_{d'} = \Pi \longrightarrow \Pi$

les reflexions d'axe d et d'

alors $M' = s_d(M)$ $\quad M'' = s_{d'}(M') = M''$

d et d' sont sécantes en O

La composée de 2 reflexions planes est une rotation de centre O et d'angle 2α

- Si $M \in \mathcal{D}$ il est invariant par les 2 reflexions $M = O$

• Soit $N \notin \Pi_M$ Soit $\Pi_N \perp \mathcal{D}$ tq $N \in \mathcal{D}$

alors Π_N est parallèle à Π

l'angle d_N et d'_N est constant car d_N // à d et d'_N // d'

donc l'angle de rotation est le même

$K = s_{P'} \circ s_P$

Cl on pourrait définir la rotation de l'espace comme

- une application composée de 2 réflexions de plans sécants
- une isométrie ayant exactement une droite de pts invariants