LECON N° ~~12~~ 15

Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier ; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone ...)

Niveau : TS

Prerequis : isométries du plan

Cadre : $(P, \vec{P})$ plan affine euclidien orienté

1. Polygone régulier

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et $O \in P$

Soient $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ n points de P tous distincts

Le n-uplet $M_0 M_1 \dots M_{n-1}$ est un polygone régulier de centre O à n sommets s'il existe une rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ / $\forall k \in \{0, \dots, n-2\}$ $r(M_k) = M_{k+1}$
$r(M_{n-1}) = M_0$

Notation On note $P_n = (M_0 M_1 \dots M_{n-1})$

Remarque

- $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ $M_k \in \mathcal{C}(O, OM_0)$
- $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_k}) = \frac{2k\pi}{n}$ $[2\pi]$
- O est l'isobarycentre des pts $(M_0, M_1, \dots, M_{n-1})$

Démonstration

Soit Ω l'isobarycentre des pts $(M_0, M_1 \dots, M_{n-1}) = P_n$

r étant une isométrie $r(\Omega)$ est l'isobarycentre de $r(P_n) = P_n$

Donc $\Omega = r(\Omega)$ Ω est un point fixe de r
Or la rotation admet un unique point fixe O son centre donc $\Omega = O$

2. Isométries conservant un polygone régulier à n sommets

Notations On va noter
$Is(P_n)$ l'ensemble des isométries conservant P_n
$Is^+(P_n)$ l'ensemble des déplacements conservant P_n
$Is^-(P_n)$ l'ensemble des antidéplacements conservant P_n

2.1 Etude de $Is(P_n)$

Propriété
Soit $f \in Is(P_n)$
Alors f est soit l'identité de P, soit une reflexion d'axe passant par O, soit une rotation de centre O

Preuve Soit $f \in Is(P_n)$
O est l'isobarycentre de P_n
donc $f(O)$ est l'isobarycentre de $f(P_n) = P_n$
donc $f(O) = O$
donc f est une isométrie ayant O c̄ point fixe
d'où le résultat

Propriété
$(Is(P_n), \circ)$ est un groupe

Preuve $Is(P_n) \subset Is(P)$
$Id_P \in Is(P_n)$ d'où $Is(P_n) \neq \emptyset$
Soient $f, g \in Is(P_n)$ $f \circ g(P_n) = f[g(P_n)] = f(P_n) = P_n$
Soit $f \in Is(P_n)$ $f(P_n) = P_n$ d'où $f^{-1} \circ f(P_n) = f^{-1}(P_n)$

$f^{-1}(P_m) = P_m$

Donc $I_s(P_m)$ est un sous-groupe de $I_s(P)$

2.2 Etude de $I_s^+(P_m)$

Propriété

$(I_s^+(P_m), \circ)$ est un groupe

Preuve $(I_s^+(P), \circ)$ est un groupe

$(I_s(P_m), \circ)$ est un groupe

$I_s^+(P_m) = I_s^+(P) \cap I_s(P_m)$

donc $(I_s^+(P_m), \circ)$ groupe

Proposition

$I_s^+(P_m) = \{Id, r, r^2, \dots, r^{m-1}\}$ où $r = r(O, \frac{2\pi}{m})$

Preuve

On note $R = \{Id, r, r^2, \dots, r^{m-1}\}$

- $r(P_m) = P_m$ donc $r \in I_s^+(P_m)$

$(I_s^+(P_m), \circ)$ est un groupe, par stabilité, $\forall k \in \{0, \dots, m-1\}$ il contient r^k

donc $R \subset I_s^+(P_m)$

- Soit $f \in I_s^+(P_m)$, f est une rotation de centre O

$f = r(O, \theta)$

Une rotation est entièrement définie par son centre un point et son image

$\exists k \in \{0, \dots, m-1\}$ tq $f(M_0) = M_k$

donc $\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_k}) = \frac{2k\pi}{m} = k \times \frac{2\pi}{m}$

donc $f = r(O, k \times \frac{2\pi}{m})$ $f = r^k$

$I_s^+(P_m) \subset R$.

Rq $I_s^+(P_m)$ isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ($I_s^+(P_m)$ est un groupe cyclique engendré par r)

2.3 Etude de $Is^-(P_n)$

$Is^-(P_m)$ n'est pas un groupe car il n'est pas stable pour la loi $\circ$ (la composée de 2 antidéplacements est un déplacement)

Proposition

Soit $\Delta = (OM_0)$

- $s_\Delta \in Is^-(P_m)$
- $Is^-(P_m) = \{ s_\Delta , s_\Delta \circ x, s_\Delta \circ x^2, \dots , s_\Delta \circ x^{m-1} \}$

Preuve

- $s_\Delta \in Is^-(P)$

Soit $k \in \{0, \dots, m-1\}$

mq $s_\Delta(M_k) \in P_m$

$M_k \in \mathcal{C}(O, OM_0)$ $\quad s_\Delta(M_0) = M_0$

$s_\Delta(\mathcal{C}(O, OM_0)) = \mathcal{C}(O, OM_0)$

d'où $s_\Delta(M_k) \in \mathcal{C}(O, OM_0)$

$(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{Os_\Delta(M_k)}) = -(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_k}) = \frac{-2k\pi}{m} \quad [2\pi]$

donc $s_\Delta(M_k) = x^{-k}(M_0) = M_{m-k}$

d'où $s_\Delta(M_k) \in P_m$

- Soit $f \in Is^-(P_m)$

$s_\Delta \circ f \in Is^+(P_m)$ $\quad$ or $Is^+(P_m) = \{Id, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$

donc $\exists k \in \{0, \dots, m-1\}$ tq $s_\Delta \circ f = x^k$

donc $f = s_\Delta \circ x^k$ $\quad$ car $s_\Delta^{-1} = s_\Delta$

Conclusion

$Is(P_m) = Is^+(P_m) \cup Is^-(P_m)$

$\mathrm{card}(Is(P_m)) = 2m \Leftarrow$ Rq : $I_S(P_m)$ isomorphe au groupe diédral D_{2m} engendré par s_Δ et x

$\mathrm{card}(Is^+(P_m)) = \mathrm{card}(Is^-(P_m)) = m$

car $Is^-(P_m) = s_\Delta \circ Is^+(P_m)$

3. Exemples

On va traiter l'exemple :
- du triangle équilatéral $n=3$
- du carré $n=4$
- de l'hexagone $n=6$
- de l'octogone $n=8$

On peut proposer un exercice qui facilitera la recherche des isométries conservant ces polygones.

exercice :

P_n a n sommets, P_p a p sommets $(p \leq n)$

Les sommets de P_p sont des sommets de P_n alors p divise n et $Is(P_p)$ est un ss-groupe de $Is(P_n)$

. On note $A_0, A_1 \dots$ les sommets de P_p

On suppose que A_0 est un sommet commun à P_p et P_n

$(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{p} \quad [2\pi]$

A_1 est un sommet de P_p donc de P_n

$(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{k 2\pi}{n} \quad [2\pi]$ avec $k \leq n$

donc $\frac{2\pi k}{n} = \frac{2\pi}{p} \iff n = kp \Rightarrow p$ divise n

. Si $Is(P_p) \subset Is(P_n)$ card $(Is(P_p))$ divise card $(Is(P_n))$

donc $Is(P_p)$ ss-groupe de $Is(P_n)$

Soit $f \in Is(P_p)$

On note $M_0, \dots, M_{n-1}$ les sommets de P_n avec $M_0 = A_0$

Si $n = kp$

Soit $l \in \{0, \dots, n-1\}$

$Of(M_l) = OM_l = OM_0$ donc $f(M_l) \in \mathcal{C}(O, OM_0)$

$(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{Of(M_l)}) = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{Of(M_0)}) + (\overrightarrow{Of(M_0)}, \overrightarrow{Of(M_l)})$

$= \frac{k' 2\pi}{p} \pm (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_l}) \quad k' \in \mathbb{Z}$

d'où $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{Of(M_\ell)}) = \frac{k'k\,2\pi}{m} + \frac{k''\,2\pi}{m}$ $\quad k'' \in \mathbb{Z}$

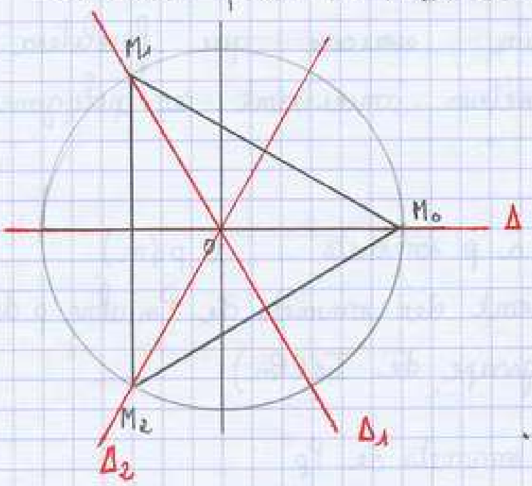
$= \frac{c\,2\pi}{m}$ avec $c \in \mathbb{Z}$

donc $f(M_\ell) \in P_m$

3.1 Le triangle équilatéral

$m = 3 \quad r = r(O, \frac{2\pi}{3})$

$Is(P_m) = \{Id, r, r^2, s_\Delta, s_\Delta \circ r, s_\Delta \circ r^2\}$



$s_\Delta \circ r$ est une reflexion

- $s_\Delta \circ r : M_2 \xrightarrow{r} M_0 \longrightarrow M_0$

$s_\Delta \circ r(M_2) = M_0$

donc $s_\Delta \circ r = s_{\Delta_1}$ avec

Δ_1 médiatrice de $[M_0 M_2]$

de m $s_\Delta \circ r^2 = s_{\Delta_2}$ avec

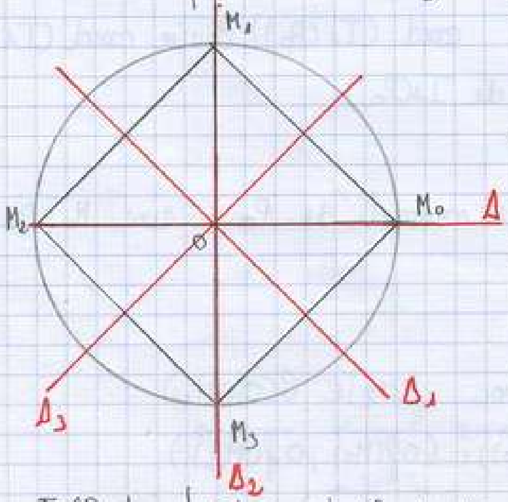
Δ_2 médiatrice de $[M_0 M_1]$

$Is(P_m) = \{Id, r, r^2, s_\Delta, s_{\Delta_1}, s_{\Delta_2}\}$

3.2 Le carré

$m = 4 \quad r = r(O, \frac{2\pi}{4})$

$Is(P_m) = \{Id, r, r^2, r^3, s_\Delta, s_\Delta \circ r, s_\Delta \circ r^2, s_\Delta \circ r^3\}$



$s_\Delta \circ r^k$ réflexion d'axe passant par O

- $s_\Delta \circ r : M_3 \xrightarrow{r} M_0 \xrightarrow{s_\Delta} M_0$

$s_\Delta \circ r = s_{\Delta_1}$ $\quad \Delta_1 = $ med $[M_3 M_0]$

- $s_\Delta \circ r^2 : M_2 \xrightarrow{r^2} M_0 \xrightarrow{s_\Delta} M_0$

$s_\Delta \circ r = s_{\Delta_2}$ $\quad \Delta_2 = $ med $[M_0 M_2] = (M_1 M_3)$

- $s_\Delta \circ r^3 : M_1 \xrightarrow{r^3} M_0 \xrightarrow{s_\Delta} M_0$

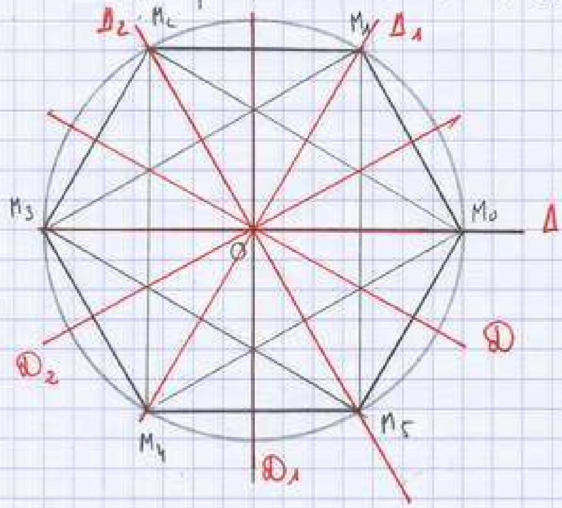
$s_\Delta \circ r^3 = s_{\Delta_3}$ $\quad \Delta_3 = $ med $[M_0 M_1]$

$Is(P_m) = \{Id, r, r^2, r^3, s_\Delta, s_{\Delta_1}, s_{\Delta_2}, s_{\Delta_3}\}$

3.3 L'hexagone

$n = 6$, $r = r(O, \frac{2\pi}{6})$

$Is(P_n) = \{Id, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s_\Delta, s_\Delta \circ r, s_\Delta \circ r^2, s_\Delta \circ r^3, s_\Delta \circ r^4, s_\Delta \circ r^5\}$



- $M_0M_2M_4$ équilatéral

  Soit $\Delta_1 = \text{med}[M_0M_2]$ $\Delta_2 = \text{med}[M_0M_4]$

- $s_\Delta \circ r$: $M_5 \xrightarrow{r} M_0 \xrightarrow{s_\Delta} M_0$

  $\mathcal{D} = \text{med}[M_0M_5]$ $s_\Delta \circ r = s_\mathcal{D}$

- $s_\Delta \circ r^3$: $M_3 \xrightarrow{r^3} M_0 \xrightarrow{s_\Delta} M_0$

  $\mathcal{D}_1 = \text{med}[M_0M_3]$ $s_\Delta \circ r^3 = s_{\mathcal{D}_1}$

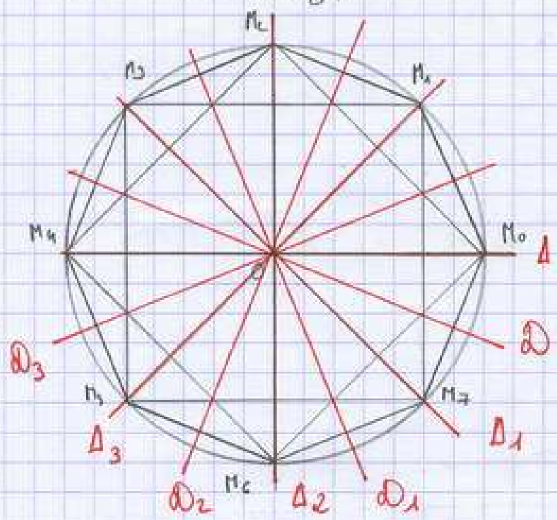
- $s_\Delta \circ r^5$ $M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_0$

  $\mathcal{D}_2 = \text{med}[M_0M_1]$ $s_\Delta \circ r^5 = s_{\mathcal{D}_2}$

Donc $Is(P_n) = \{Id, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s_\Delta, s_{\Delta_1}, s_{\Delta_2}, s_\mathcal{D}, s_{\mathcal{D}_1}, s_{\mathcal{D}_2}\}$

3.4 L'octogone

$n = 8$ $r = r(O, \frac{2\pi}{8})$



$M_0M_2M_4M_6$ carré

Soit $\Delta_1 = \text{med}[M_0M_6]$

$\Delta_2 = (M_2M_6)$

$\Delta_3 = \text{med}[M_0M_2]$

- $s_\Delta \circ r$: $M_7 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_0$

  $\mathcal{D} = \text{med}[M_7M_0]$

- $s_\Delta \circ r^3$: $M_5 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_0$

  $\mathcal{D}_1 = \text{med}[M_5M_0]$

- $s_\Delta \circ r^5$ $M_3 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_0$

  $\mathcal{D}_2 = \text{med}[M_0M_3]$

- $s_\Delta \circ r^7$ $M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_0$

  $\mathcal{D}_3 = \text{med}[M_0M_1]$

$Is(P_8) = \{Id, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s_\Delta, s_{\Delta_1}, s_{\Delta_2}, s_{\Delta_3}, s_\mathcal{D}, s_{\mathcal{D}_1}, s_{\mathcal{D}_2}, s_{\mathcal{D}_3}\}$