LECON N°40

43

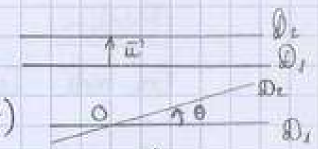
Groupe des isométries du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions , groupe des déplacements , classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants

Niveau TS Spé

Prérequis
- translations, reflexions, rotations
- composition de 2 réflexions

si $\mathcal{D}_1 /\!/ \mathcal{D}_2$ alors $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = t_{2\vec{u}}$

si $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{O\}$ alors $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = r(O, 2\theta)$



- Une translation et une rotation peut se décomposer en 2 réflexions

$(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$ plan affine euclidien orienté

1. Groupe des isométries du plan

1.1 Généralités

Définition

Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ bijective

f est une isométrie du plan si $\forall (A,B) \in \mathcal{P}^2 \quad AB = f(A)f(B)$

Exemple les translations et les réflexions sont des isométries

Une projection orthogonale n'est pas une isométrie

Théorème

Une isométrie est une application affine.

Preuve f une isométrie Soient $A, B, G \in \mathcal{P}$, $A' = f(A)$ $B' = f(B)$ $G' = f(G)$

. conservation du produit scalaire

$2\vec{GA}.\vec{GB} = GA^2 + GB^2 - (\vec{GA} - \vec{GB})^2 = GA^2 + GB^2 - BA^2 = G'A'^2 + G'B'^2 - B'A'^2$

$= G'A'^2 + G'B'^2 - (\vec{G'A'} - \vec{G'B'})^2 = 2\vec{G'A'}.\vec{G'B'}$

• conservation du barycentre

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\alpha+\beta \neq 0$

$$G = \text{Bary}\{(A,\alpha),(B,\beta)\} \Leftrightarrow \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 GA^2 + \beta^2 GB^2 + 2\alpha\beta\, \vec{GA}.\vec{GB} = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 G'A'^2 + \beta^2 G'B'^2 + 2\alpha\beta\, \vec{G'A'}.\vec{G'B'} = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha\vec{G'A'} + \beta\vec{G'B'} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow f(G) = \text{Bary}\{(f(A),\alpha),(f(B),\beta)\}$$

1.2 Groupe des isométries

Notation

On note $Is(\mathcal{P})$ l'ensemble des isométries du plan.

Théorème

$(Is(\mathcal{P}), \circ)$ est un groupe.

Preuve

. $Id_\mathcal{P} \in Is(\mathcal{P})$ donc $Is(\mathcal{P}) \neq \emptyset$

. Soit $f \in Is(\mathcal{P})$ $\quad f \circ Id_\mathcal{P} = Id_\mathcal{P} \circ f = f \quad Id_\mathcal{P}$ él^t neutre de $(Is(\mathcal{P}),\circ)$

. Soit $f, g \in Is(\mathcal{P})$ $\quad$ Soient $A, B \in \mathcal{P}$ $\quad AB = g(A)g(B) = f\circ g(A) f\circ g(B)$

Soit $M \in \mathcal{P}$ $\quad \exists!\, B \in \mathcal{P}$ tq $f(B) = M$ $\quad$ (f bijective)
$\quad \exists!\, A \in \mathcal{P}$ tq $g(A) = B$ $\quad$ (g bijective)

donc $\exists!\, A \in \mathcal{P}$ tq $f\circ g(A) = f(B) = M$ $\quad$ donc $f\circ g \in Is(\mathcal{P})$

. Soit $f \in Is(\mathcal{P})$ $\quad f^{-1}$ application réciproque de f est bijective

Soient $A, B \in \mathcal{P}$ $\quad f\circ f^{-1}(A) = A \quad f\circ f^{-1}(B) = B$ $\quad$ donc $f\circ f^{-1}(A) f\circ f^{-1}(B) = AB$

$f \in Is(\mathcal{P})$ donc $\quad f\circ f^{-1}(A) f\circ f^{-1}(B) = f^{-1}(A) f^{-1}(B)$

donc $AB = f^{-1}(A) f^{-1}(B)$ $\quad$ donc $f^{-1} \in Is(\mathcal{P})$

. $\circ$ est associative

1.3 Déplacement de antidéplacements

Définition

On appelle déplacement une isométrie qui conserve les angles orientés. On appelle antidéplacement une isométrie qui inverse les angles orientés

Exemple

Une rotation est un déplacement, une réflexion est un antidéplacement

Notation

On note $Is^+(P)$ l'ensemble des déplacements, $Is^-(P)$ l'ensemble des antidéplacements

Proposition

La composée de deux antideplacements est un déplacement

Preuve Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{P}$, Soient f, g deux antidéplacements
$\vec{u'} = \vec{f}(\vec{u})$ $\vec{v'} = \vec{f}(\vec{v})$, $\vec{u''} = \vec{g}(\vec{u'})$ $\vec{v''} = \vec{g}(\vec{v'})$
$(\vec{u'}, \vec{v'}) = -(\vec{u}, \vec{v})$ de plus $(\vec{u''}, \vec{v''}) = -(\vec{u'}, \vec{v'})$
donc $(\vec{u''}, \vec{v''}) = (\vec{u}, \vec{v})$ de plus $g \circ f \in Is(P)$

Propriété

$(Is^+(P), \circ)$ est un sous groupe de $(Is(P), \circ)$

Preuve . $Id_P \in Is^+(P)$
. $f, g \in Is^+(P)$ $f \circ g \in Is(P)$, f et g conserve des angles orientés donc $f \circ g$ conserve les angles orientes
$f^{-1} \in Is(P)$ si $f^{-1} \in Is^-(P)$ f^{-1} inverse les angles orientés et f les conserves donc $f \circ f^{-1}$ inverse les angles orientés donc $Id_P = f \circ f^{-1}$ inverse les angles orientés contradiction

2 - Classification des isométries du plan

2.1 Isométries du plan ayant au moins un point fixe

Théorème

Une isométrie qui a 3 points fixes non alignés est l'identité

Preuve

Soient A, B, C trois pts fixes distincts non alignés

Soit $M \in \mathcal{P}$, $M = Bary\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

$M' = f(M)$ $M' = Bary\{(f(A),\alpha)(f(B),\beta)(f(C),\gamma)\}$

$M' = Bary\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\} = M$ donc $f = Id_{\mathcal{P}}$

Théorème

Une isométrie différente de l'identité qui a 2 points fixes A et B distincts est la reflexion d'axe (AB)

Preuve

Soit $f \in I_s(\mathcal{P})$ $f \neq Id_{\mathcal{P}}$ tq $A = f(A)$ $B = f(B)$

On note $s_{(AB)}$ la reflexion d'axe (AB)

Soit $C \in \mathcal{P}$, $C \notin (AB)$ si $f(C) = C$ alors $f =$ identité impossible

donc $C' = f(C) \neq C$

$CA = C'A$ et $CB = C'B$ donc $A \in med[CC']$ et $B \in med[CC']$

donc (AB) est la médiatrice de $[CC']$ d'où $C' = s_{(AB)}(C)$

On a donc $s_{(AB)} \circ f$ qui admet trois points fixes A, B, C non alignés donc $s_{(AB)} \circ f = Id_{\mathcal{P}}$ d'où $f = s_{(AB)}$

Théorème

Une isométrie qui admet un seul point fixe O est une rotation de centre O et d'angle non nul.

Preuve $f \in I_s(\mathcal{P})$ $f(O) = O$ $\forall M \neq O$ $f(M) \neq M$

Soit $A \in \mathcal{P}$ tq $f(A) = A' \neq A$

On note s_Δ la symétrie d'axe la médiatrice de $[AA']$, Δ

$OA = OA'$ donc $O \in \Delta$

donc $s_\Delta \circ f(O) = O$ et $s_\Delta \circ f(A) = A$

donc $s_\Delta \circ f$ qui a deux points fixes est soit l'identité soit une reflexion d'axe (OA). Si $s_\Delta \circ f = Id$ $f = s_\Delta$ et f a au moins

2 pts fixes contradiction

donc $s_\Delta \circ f$ est la reflexion d'axe (OA)

donc $f = s_\Delta \circ s_{(OA)}$ or Δ et (OA) sont sécantes en O et distinctes

donc f est rotation de centre O

2.2 Isométries n'ayant aucun point fixe

Propriété

Soit $O \in \mathcal{P}$, toute isométrie se décompose de manière unique en $t \circ g$ où g est une isométrie fixant O et t une translation

Preuve $f \in Is(\mathcal{P})$ $O \in \mathcal{P}$ $O' = f(O)$

. Soient t et t' deux translations, g et g' deux isométries fixant O

tq $f = t \circ g$ et $f = t' \circ g'$ alors $t \circ g = t' \circ g'$

$t(O) = O'$ et $t'(O) = O'$ donc $t = t' = t_{\overrightarrow{OO'}}$

d'où $g = g'$

. Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ $t(O) = O'$

On pose $g = t^{-1} \circ f$ g est une isométrie et $t^{-1} \circ f(O) = O$

donc $\exists t$, et g vérifiant les hypothèses tq $f = t \circ g$

Théorème

Une isométrie qui n'admet aucun point fixe est soit une translation soit la composée d'une translation et d'une reflexion (on dit aussi symétrie glissée)

Preuve

Soit $f \in Is(\mathcal{P})$ tq $\forall M \in \mathcal{P}$ $f(M) \neq M$

Soit $O \in \mathcal{P}$, $O' = f(O)$ Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{O'O}$

$(t \circ f)(O) = O$ et $t \circ f$ est une isométrie donc $g = (t \circ f)$ est soit l'identité, soit une reflexion, soit une rotation

$f = t^{-1} \circ g$ si g est une rotation d'angle non nul f est une rotation or f n'a aucun point fixe donc g n'est pas une rotation donc f est soit une translation soit la composée d'une translation et d'une reflexion

2.3 Décomposition d'une isométrie en produit de réflexion

Théorème

Une isométrie se décompose en produit d'au plus trois réflexions

Preuve Soit $f \in Is(\mathcal{P})$

- si $f = Id_{\mathcal{P}}$ Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ une droite $s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}} = f$
- si $f = s_\Delta$ immédiat
- si $f = r(O, \theta)$ $\theta \neq 0$, r peut se décomposer en 2 réflexions d'axe $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ non //
- si $f = t_{\vec{u}}$ $t_{\vec{u}}$ peut se décomposer en 2 réflexions d'axe $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ //
- si $f = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ $t_{\vec{u}}$ peut se décomposer en 2 réflexions d'axe $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ // donc $f = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} \circ s_\Delta$

Conséquences

- Une isométrie conserve
  - l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité
  - le contact
  - le barycentre
  - la mesure des angles géométriques
  - les aires
- Une isométrie transforme
  - une droite en une droite, un segment en un segment
  - un cercle en un cercle
- Selon le nombre de reflexions qui interviennent dans la décomposition d'une isométrie en produit de reflexions

Une isométrie est soit un déplacement, soit un antidéplacement.
Les déplacements sont les translations et les rotations
Les antidéplacements sont les réflexions et les symétries glissées

3_ Application

Quels sont des déplacements et antidéplacements qui laissent invariant un carré ABCD de sens direct de centre O.