Exposé 42 :

Composée d'homothéties et de translations du plan. Relation vectorielle caractéristique. Groupe des homothéties translations. Applications :

Cadre : $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$ plan affine ($\vec{\mathcal{P}}$ plan vectoriel associé).

0- Pré-Requis :

- définition et propriété des homothéties et translations.
- espace affine, application affine.
- notion de Groupe.
- $(S(\mathcal{P}), \circ)$ est un groupe. (l'ensemble des transformations de $\mathcal{P}$ est un groupe pour $\circ$)

Notation : On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties de P

$\mathcal{T}$ ———— translations de P.

I Relation vectorielle caractéristique :

Thm : Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, une application. $f \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*, \forall M, N \in \mathcal{P}, \overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}$

[$\Rightarrow$. Si $f = h_{O,k}$, $k \in \mathbb{R}^*$, on a $f : O \to O$ soit $M, N \in \mathcal{P}$ on a $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{Of(M)} = k\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{Of(N)} = k\overrightarrow{ON}\end{array}\right\}$ def homothétie

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(M)O} + \overrightarrow{Of(N)} = k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) = k\overrightarrow{MN}$$

• si $f = t_{\vec{u}}$, soit $M, N \in \mathcal{P}$ on a $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u} \\ \overrightarrow{Nf(N)} = \vec{u}\end{array}\right\}$ $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Nf(N)} = \vec{u}$

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(M)M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Nf(N)} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u}$$

$\Leftarrow$. si $k = 1$ $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{MN}$ $\forall M, N \in \mathcal{P}$

$\Leftrightarrow MNf(N)f(M)$ parallélogramme

$\Leftrightarrow \overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Nf(N)}$

Il suffit de fixer M pour voir qu'il s'agit d'une translation de vecteur $\overrightarrow{Nf(N)}$

• si $k \neq 1$: fixons $O \in E$. On a $\overrightarrow{f(O)f(M)} = k\overrightarrow{OM}$ $\forall M \in \mathcal{P}$

alors $f(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{f(O)M} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(O)O} = (k-1)\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{k-1}\overrightarrow{f(O)O}$

cela montre l'unicité du point fixe.

Soit Ω ce pt on a alors $\forall M \in \mathcal{P}$ $\overrightarrow{\Omega f(M)} = k\overrightarrow{\Omega M}$ donc f est une homothétie de centre Ω et de rapport k.]

II Composition d'homothétie et de translation :

1) Groupe des homothéties - translations.

Thm : $(\mathcal{H} \cup \mathcal{T}, \circ)$ est un sous groupe de $(S(\mathcal{P}), \circ)$ l'ensemble des transformations du plan.

[. On a bien sur $\mathcal{H} \cup \mathcal{T} \subset S(\mathcal{P})$

• $\mathcal{H} \cup \mathcal{T} \neq \emptyset$ car $Id_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

• Soit $f, g \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ de rapports k et m :

$\forall M, N \in \mathcal{P}$: $\overrightarrow{g\circ f(M) g\circ f(N)} = \overrightarrow{g(f(M))g(f(N))} = m\,\overrightarrow{f(M)f(N)} = mk\overrightarrow{MN}$ dc $g \circ f \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

• Soit $f \in \mathcal{HV} \cup \mathcal{T}$ de rapport k. (On a vu que $f \in \mathcal{HV} \cup \mathcal{T}$ alors $k \in \mathbb{R}^*$)

$\forall M, N \in P \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}$

Appliqué à $f^{-1}(M)$ et $f^{-1}(N)$ dc $\overrightarrow{f(f^{-1}(M))f(f^{-1}(N))} = k\,\overrightarrow{f^{-1}(M)f^{-1}(N)}$

Rq: f^{-1} existe car $f \in (S(P), \circ)$ groupe des transfo du Plan

ie $\frac{1}{k}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f^{-1}(M)f^{-1}(N)}$ car $k \in \mathbb{R}^*$

Donc $f^{-1} \in \mathcal{HV} \cup \mathcal{T}$.]   reste à mq $f^{-1} \in \mathcal{HV} \cup \mathcal{T}$

2) Composée de deux translations:

Thm: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{P}$, $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$

[Soit $M \in \vec{P}$ $t_{\vec{v}}(M) = M'$ et $t_{\vec{u}}(M') = M''$

ie $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ ie $\overrightarrow{M'M''} = \vec{u}$

$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}(M) = t_{\vec{u}}(M') = M''$

or $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{v} + \vec{u}$ ie $\boxed{t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}}$

3) Composée de deux homothéties:

Thm: Soit $h_1 = h(O_1, k_1)$, $h_2(O_2, k_2)$, avec $k_1 \neq 1$ et $k_2 \neq 1$. On pose $f = h_2 \circ h_1$

* Si $O_1 = O_2 = O$ $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2 = h(O, k_1k_2)$
* Si $O_1 \neq O_2$ si $k_2k_1 = 1$ $f = t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$

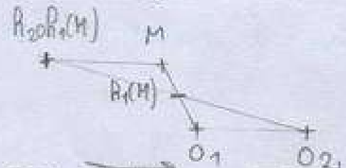
  si $k_1k_2 \neq 1$ $f = h(O, k_1k_2)$ avec $O \in (O_1O_2)$

  et $\overrightarrow{O_1O} = \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}$

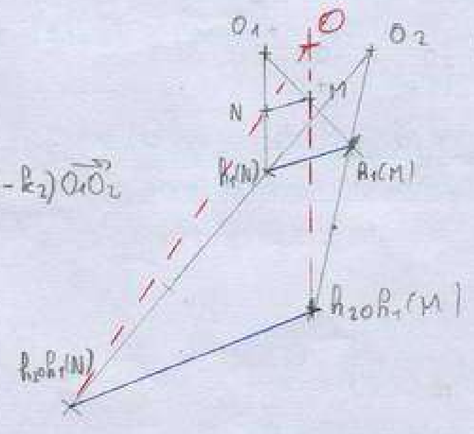
Rq: On a dans le cas $O_1 \neq O_2$ et $k_1k_2 \neq 1$ O, O_1 et O_2 alignés.

Exemple: $O_1 \neq O_2$ et $k_2k_1 = 1$ $h_1(O_2, \frac{1}{2})$ et $h_2(O_2, 2)$

$O_1 \neq O_2$ et $k_2k_1 \neq 1$ $h_1(O_2, 2)$ et $h_2(O_2, 3)$



Ici $\overrightarrow{M h_2 \circ h_1(M)} = -\overrightarrow{O_1O_2} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$



On constate avec cette exemple simple que O, O_1, O_2 alignés...

4) Composée d'une homothétie et d'une translation :

Thm : Soit $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $h = h(O,k)$, $k \neq 1$ et $k \in \mathbb{R}^*$

$f = h \circ t_{\vec{u}} = h(\Omega, k)$ avec $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$

$f = t_{\vec{u}} \circ h = h(\Omega', k)$ avec $\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$

Rq : Les cas $\vec{u} = \vec{0}$ (ie $t_{\vec{u}} = Id_{\mathcal{P}}$) et $k = 1$ (ie $h = Id_{\mathcal{P}}$) sont évidents.

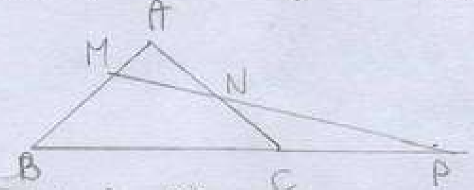
Récapitulatif : (Transparent)

composée	Nature	élément géométrique.
$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$	translation	vecteur $\vec{u}+\vec{v}$
$t_{\vec{u}} \circ h_{(O,k)}$ $k \neq 1$	homothétie de rapport k	centre Ω avec $\overrightarrow{O\Omega}$ et $\vec{u}$ colinéaires
$h(O,k) \circ t_{\vec{u}}$, $k \neq 1$	homothétie de rapport k	centre Ω' — $\overrightarrow{O\Omega'}$ et $\vec{u}$ —
$h(O,k) \circ h(O',k')$	$kk' = 1$ translation	vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{OO'}$
$k \neq 1$ et $k' \neq 1$	$kk' \neq 1$ homothétie	de centre Ω alignés avec O et O' (Thm des 3 centres)

III Applications :

1) Thm de Menelaüs :

Soit ABC un triangle non applati :



M, N, P alignés $\Leftrightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$

[$\Rightarrow$ Notons h_M l'homothétie de centre M transformant B en A.

h_N ———————— N ———————— A en C

h_P ———————— P ———————— C en B

$f = h_P \circ h_N \circ h_M(B) = B$ donc f compo de 3 homo est une homo ou transl

or B fixe ie f homothétie de centre B. on a M, N, P alignés

Absurde car si f homothétie de centre B alors $B \in$ la droite (MNP)

Donc f translation avec pt fixe ie $f =$ Identité.

Le rapport de $f = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$

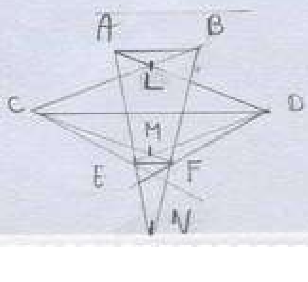
$\Leftarrow$ On prend f définie comme ci dessus. $f \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ de rapport $1 \Rightarrow f \in \mathcal{T}$

Comme $f(B) = B$ on aura $f = Id$ ie $h_N \circ h_M = h_P^{-1}$

ie N, M et P alignés]

2) Configuration des trapèzes :

On considère $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$, 3 segments parallèles.

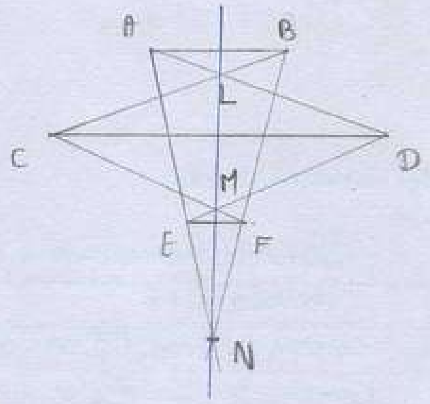


(AD) et (BC) se coupent en L

(DE) et (CF) ———— en M

(AE) et (BF) ———— en N

Mq L, M, N alignés.



[$h_L : B \longrightarrow C$ (elle existe car config de thalès)
$\quad A \longrightarrow D$

$h_M : C \longrightarrow F$ (" ")
$\quad D \longrightarrow E$

$h_M \circ h_L : B \longrightarrow F$
$\quad A \longrightarrow E$

$h_M \circ h_L$ est une homothétie qui transforme B en F et A en E. Puisque BF et AE se coupent en N
alors $h_M \circ h_L = h_N$ où $h_N : B \to F$, $A \to E$

et dc L, M, N st alignés.

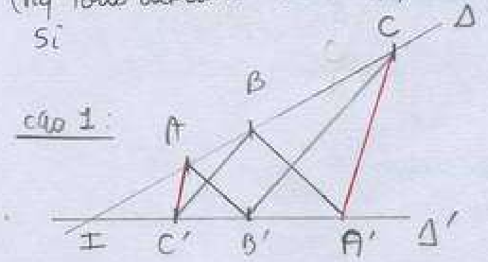
Rq: ds la composée on ne peut avoir de translation car sinon $\vec{BF} = \vec{AE}$ (si translation) et donc parallélogramme. et donc (AE) et (BF) ne st pas sécantes
Absurde d'après les hypothèses.]

3) Théorème de Pappus :

Soit Δ et Δ' deux droites distinctes et sécantes en I du plan affine $A, B, C \in \Delta$ et $A', B', C' \in \Delta'$
(Rq Tous distincts de $\Delta \cap \Delta'$)

Si

cas 1 :



Si $(AB') // (A'B)$ et si $(C'B) // (B'C)$ alors $(AC') // (A'C)$

[D'après thalès : $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}} = \dfrac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = k$ et $\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IC'}} = \dfrac{\overline{IC}}{\overline{IB}} = k'$

Donc $h_{I,k} : A \to B$, $B' \to A'$ $\qquad h_{I,k'} : B \to C$, $C' \to B'$

Ainsi $h_{I,k} \circ h_{I,k'} : C' \longrightarrow A'$
$h_{I,k'} \circ h_{I,k} : A \longrightarrow C$

Or ces deux homothéties commutent et leur produit est une homothétie or $h(D) = D'$ alors $D' // D$
ie $\boxed{(AC') // (A'C)}$]

Thm : Composée d'homothéties :

[Soit $M \in \mathcal{P}$ $\quad f(M) = h_2 \circ h_1(M) = h_2(M') = M''$

- Si $O_1 = O_2 = O$

$\overrightarrow{OM''} = k_2 \overrightarrow{OM'} = k_2 k_1 \overrightarrow{OM}$ donc $f = h_{(O, k_1 k_2)}$

- Si $O_1 \neq O_2$

1er cas $k_1 k_2 = 1$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M''} &= \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + k_2 \overrightarrow{O_2M'} \\ &= \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + k_2 \overrightarrow{O_2O_1} + k_2 \overrightarrow{O_1M'} \\ &= \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1O_2}(1-k_2) + \underbrace{k_2 k_1}_{1} \overrightarrow{O_1M} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{O_1O_2}(1-k_2)}_{\text{cte } \forall M \in \mathcal{P}}\end{aligned}$$

Donc $f = t_{(1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}}$

2ème cas $k_1 k_2 \neq 1$

$\overrightarrow{MM''} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2} + (1-k_2k_1)\overrightarrow{MO_1}$

MM'' dépend de M donc f n'est pas une translation, ie f est une homothétie de centre O et de rapport k. (En effet $f, g \in \mathcal{H} \circ \mathcal{T} \Rightarrow f \circ g \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$)

Recherche du point O :

$\overrightarrow{OO''} = \vec{O} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2} + (1-k_2k_1)\overrightarrow{OO_1}$

ie $\boxed{\overrightarrow{O_1O} = \dfrac{(1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}}{1-k_2k_1}}$

Recherche du rapport k :

$O_1 \xrightarrow{h_1} O_1 \xrightarrow{h_2} f(O_1)$

$\overrightarrow{Of(O_1)} = k\overrightarrow{OO_1}$ or

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Of(O_1)} = \overrightarrow{Oh_2(O_1)} &= \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2h_2(O_1)} \\ &= \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} \\ &= \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1O_2}(1-k_2) \\ &= \overrightarrow{OO_1} + (1-k_2k_1)\overrightarrow{O_1O} \\ &= k_2k_1\overrightarrow{OO_1}\end{aligned}$$

ie $k = k_1 k_2$]

Composée d'homothéties-translations :

II Soit $M \in \mathcal{P}$. et $f = h \circ t_{\vec{u}}$

- $f(M) = h \circ t_{\vec{u}}(M) = h \circ (M') = M''$ $\quad t_{\vec{u}}$ et $h = h(O,k)$

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{OM''}$$
$$= \vec{u} + \overrightarrow{M'O} + k\overrightarrow{OM'}$$
$$= \vec{u} + (1-k)\overrightarrow{M'O}$$

$\overrightarrow{MM''}$ dépend de M car $(1-k) \neq 0$ donc f est une homothétie de centre Ω et rapport r.

Recherche de Ω :

$f(\Omega) = \Omega$ et $\Omega' = t_{\vec{u}}(\Omega)$ $\quad \vec{u} = \overrightarrow{\Omega\Omega'}$

$$\overrightarrow{\Omega f(\Omega)} = \vec{0} \underset{\text{au dessus}}{=} \vec{u} + (1-k)\overrightarrow{\Omega' O}$$
$$\iff \vec{0} = \vec{u} + (1-k)\overrightarrow{\Omega'\Omega} + (1-k)\overrightarrow{\Omega O}$$
$$= \vec{u} + (k-1)\vec{u}$$
$$(1-k)\overrightarrow{O\Omega} = k\vec{u}$$
$$\boxed{\overrightarrow{O\Omega} = \frac{k}{1-k}\vec{u}}$$

Recherche du rapport r :

Soit O' tq $\overrightarrow{O'O} = \vec{u}$ $\quad O' \xrightarrow{t_{\vec{u}}} O \xrightarrow{h} O$ $\quad$ dc $f(O') = O$

dc $\overrightarrow{\Omega O} = r\overrightarrow{\Omega O'}$

$$\overrightarrow{\Omega O} = \frac{-k}{1-k}\vec{u} = \frac{-k}{1-k}\overrightarrow{O'O}$$
$$\overrightarrow{\Omega O} = \frac{-k}{1-k}\overrightarrow{O'\Omega} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{\Omega O} \iff \overrightarrow{\Omega O}\left(1 + \frac{k}{1-k}\right) = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{\Omega O'}$$
$$\overrightarrow{\Omega O}\left(\frac{1}{\cancel{1-k}}\right) = \frac{k}{\cancel{1-k}}\overrightarrow{\Omega O'} \quad \text{ie } \boxed{\overrightarrow{\Omega O} = k\overrightarrow{\Omega O'}} \ \text{ie } r = k$$

ie f homothétie de rapport k

Si $f = t_{\vec{u}} \circ h$ $\quad f^{-1} = (t_{\vec{u}} \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ t_{\vec{u}} = h(O, \frac{1}{k}) \circ t_{-\vec{u}}$

donc f^{-1} (d'après ce qu'on a vu au dessus) est une homothétie de centre Ω' tq $\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{1/k}{1-1/k}(-\vec{u})$ et de rapport $\frac{1}{k}$

$$\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{1}{k-1}(-\vec{u}) = \frac{1}{1-k}\vec{u}$$

donc f est une homothétie de centre Ω' tq $\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$ et de rapport k.