Exposé 41 :

1re S et
Niveau : TS

Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Associativité. Application à la détermination de barycentres attachés à des configurations usuelles du plan, de l'espace.

On se place dans $(E, \vec{E})$ un espace affine.

0 - Pré Requis :

- Calculs vectoriels, Relation de Chasles.
- Droites remarquables du triangle.
- Espaces affines.

I Définition du barycentre de n points pondérés :

Def : On appelle point pondéré tout couple (A, α) où A est un point de E et α un réel appelé coefficient de A.

Def : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de n points pondérés. On appelle fonction vectorielle de Leibniz associée au système $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i \leq n}$ la fonction $\vec{f} : E \longrightarrow \vec{E}$, $M \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

Prop : Si $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, il existe un unique $P \in E$ tq $\vec{f}(P) = \vec{0}$

[Soit $O \in E$ fixé. L'unicité du point P vient du fait que $\vec{f}$ est une bijection.

Rappel : $\vec{f}$ bijective $\Leftrightarrow \forall \vec{u} \in \vec{E}, \exists! M \in E$ tq $\vec{f}(M) = \vec{u}$

Si on prend $\vec{u} \in \vec{E}$ $\vec{f}(M) = \vec{u} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{u}$

$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}_{m \neq 0} \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{u}$ ie $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} - \vec{u}}{m}$

D'où l'unicité du point M. donc $\vec{f}$ bijection]

Rq : - Si $m = 0$ $\vec{f}$ est constante.
- m est appelé masse du système.

Def : On appelle barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ l'unique point G de E tq $\vec{f}(G) = \vec{0}$ càd $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ où $\vec{f}$ fonction de Leibniz associée au système.
Ce point G est aussi défini par $m \overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ où $M \in E$ quelconque.

Rq : - L'unicité de G vient de la proposition précédente.
- La relation vectorielle est obtenue en appliquant Chasles.

Def : Dans la déf précédente si on a de plus les α_i tous égaux, alors G est appelé isobarycentre du système.

Notation : $G = \mathrm{Bar}\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}\}$ où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

ou $\dfrac{G}{\sum \alpha_i} \sim \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{array}$

II Propriétés :

1) Propriétés :

Thm : Soit $G = Bar\{(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le m}\}$ avec $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \neq 0$

i) (Commutativité) G est inchangé
- si l'on ajoute un point de coefficient nul
- si l'on échange des points pondérés (A_j, α_j)

ii) (Homogénéité) : $G = Bar\{(A_i, \lambda\alpha_i)_{1\le i\le m}\}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$

iii) (Associativité) : G est inchangé si on remplace un ou plusieurs points pondérés par le barycentre correspondant affecté de la somme de leurs coefficients.

Exemple : $\frac{G}{3}\Big| \sim \frac{A}{1}\Big|\frac{B}{1}\Big|\frac{C}{1}$ et $\frac{I}{2}\Big| \sim \frac{A}{1}\Big|\frac{B}{1}$ alors $\frac{G}{3}\Big| \sim \frac{I}{2}\Big|\frac{C}{1}$

[i) et ii) évident :

iii) $G = Bar\{(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le m}\}$

Soit $J \subset \{1, \dots, m\}$, $J \neq \emptyset$ et $J \neq \{1, \dots, m\}$ tq $\sum_{j\in J} \alpha_j = m' \neq 0$

alors soit $G' = Bar\{(A_i, \alpha_i)_{i\in J}\}$

Soit $K = \{1, \dots, m\} \setminus J$ on a alors $K \cup J = \{1, \dots, m\}$ et $K \cap J = \emptyset$

on a $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0} \iff \underbrace{\sum_{i\in J} \alpha_i \vec{GA_i}}_{= m'\vec{GG'}} + \sum_{i\in K} \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$]

$\iff G = Bar\{(G', m'), (A_i, \alpha_i)_{i\in K}\}$

2) Coordonnées barycentriques :

Def : Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine de dimension n. Un repère affine de E est une $(n+1)$ liste $(A_0, \dots, A_n)$ de points tq la famille $(\vec{A_0A_1}, \dots, \vec{A_0A_n})$ soit une base de $\vec{E}$.

Thm : Si $(A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine de E, alors

i) $\forall M \in E$, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $M = Bar\{(A_i, \alpha_i)_{0\le i\le n}\}$

ii) Si $M = Bar\{(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}\}$ et $M = Bar\{(A_i, b_i)_{0\le i\le n}\}$ alors les suites $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(b_0, \dots, b_n)$ sont proportionnelles

iii) $\forall M \in E$, $\exists! (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $M = Bar\{(A_i, \alpha_i)_{0\le i\le n}\}$ et $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$

Def : Dans les conditions du thm précédent, la liste $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est appelée système de coordonnées barycentriques de M dans le repère affine $(A_0, \dots, A_n)$

Si $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$, on dit que le système est normalisé.

Thm : Si $(x_{j1}, \dots, x_{jn})$ désigne les coordonnées normalisées de A_j dans un repère affine de E, les coordonnées $(g_1, \dots, g_n)$ de $G = Bar\{(A_j, \alpha_j)_{1\le j\le m}\}$

sont $g_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{ji}}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j}$

3) Sous Espaces affines :

Thm : i) Soit A, B deux pts distincts de E.
La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B

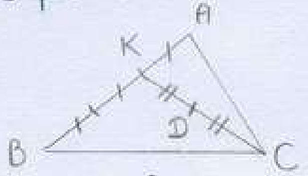
ii) Soit A, B, C trois points distincts et non alignés de E. Le plan formé par A, B, C est l'ensemble des barycentres de A, B, C.

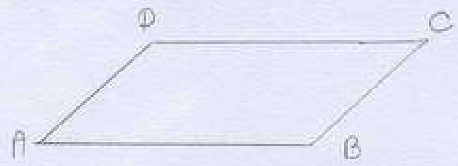
Rq : On peut généraliser ce thm : (ie le sous espace affine engendré par une partie non vide $\mathcal{A}$ de E est l'ensemble des barycentres des points de $\mathcal{A}$.

III Applications :

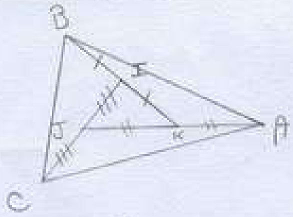
Exercice 1 (Simple) :

Exprimer D comme barycentre des pts A, B, C ds les figures suivantes.





Exercice 2 :



Soit A, B, C, 3 pts affinement indépendants de E.
Déterminer géométriquement 3 pts I, J, K tq K milieu de [JA], I milieu de [BK] et J milieu [IC].
(ie déterminer coordonnées barycentriques de I, J, K ds le repère affine A, B, C).

Exercice 3 :

Mq : i) l'isobarycentre d'un triangle ABC est le point d'intersection des 3 médianes et est situé au 2/3 de chacunes à partir du sommet correspondant.

ii) L'isobarycentre d'un tétraèdre ABCD est le point d'intersection des segments joignant chaque sommet au centre de gravité de la face opposée et est situé au 3/4 de chacun de ces segments à partir du sommet correspondant.

Exercice 4 :

Les bissectrices intérieures de ABC sont concourantes en $I = Bar\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$

où $a = BC$
$b = AC$
$c = AB$.

Démonstration

On se place dans un espace affine $(E, \vec{E})$ → Espace vectoriel associé de la fonction

0_Pré-requis

- Calculs vectoriels, Relation de Chasles.
- Droites remarquables du triangle.
- Espaces affines.

Coord bary des Δ médiatrices : $(\sin 2a, \dots$ Voir Exposé 3.1 Mégamaths.

I Etude de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

1) Définition :

Même chose pour orthocentre ...

• On appelle point pondéré tout couple (A, α) formé par un point A de E et par un réel α appelé coefficient de A.

• Soit $m \in \mathbb{N}^*$, soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq m}$ un système de m points pondérés.
On appelle fonction vectorielle de Leibniz associée au système $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq m}$ la fonction $\vec{f} : E \longrightarrow \vec{E}$

$$M \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

2.) Etude de $\vec{f}$

Soit $O \in E$ fixé. On note $m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$

$\forall M \in E$ on a $\vec{f}(M) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{m} \overrightarrow{OA_i}$ Chasles.

$$\vec{f}(M) = m\,\overrightarrow{MO} + \vec{f}(O)$$

* Si $m = 0$

$\forall M \in E$ on a $\vec{f}(M) = \vec{f}(O) \Rightarrow \vec{f}$ est constante.

* Si $m \neq 0$

$\vec{f}$ est bijective de E sur $\vec{E}$ ie $\forall \vec{u} \in \vec{E}, \exists! M \in E$ tq $\vec{f}(M) = \vec{u}$

En effet soit $\vec{u} \in \vec{E}$, M est définie par $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\vec{f}(O) - \vec{u}}{m}$

Si on prend $M' \in E$ tq $\vec{f}(M') = \vec{u}$ alors $\vec{f}(M') = \dfrac{\vec{f}(O) - \vec{u}}{m} = \vec{f}(M)$

Conséquence :

$\boxed{\text{Si } m \neq 0 \text{, il existe un unique } P \in E \text{ tq } \vec{f}(P) = \vec{0}}$

Vient de la bijection de $\vec{f}$ si $m \neq 0$

II Barycentre d'un système de m pts pondérés :

Def : Soit $\vec{f}$ la fonction de Leibniz associée au système $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq m}$. On note $m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ et on suppose $m \neq 0$. On appelle barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq m}$ l'unique point G de E tq $\vec{f}(G) = \vec{0}$ càd $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.
Ce point G est aussi défini par la relation vectorielle $m\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ où $M \in E$ quelconque

Rq: La notation vectorielle est obtenue en appliquant Chasles.
- L'unicité du point G provient de la conséquence de la partie I.

Def: Dans la définition précédente si on suppose de plus que les α_i sont tous égaux, le point G est appelé isobarycentre du système.

Notation: $G = \mathrm{Bar}\{(A_i;\alpha_i)_{1\leq i\leq m}\}$ ou $\dfrac{G}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i} \sim \dfrac{A_1 \mid \cdots \mid A_m}{\alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_m}$

Exemple: $m=2$: G l'isobarycentre de $(A,1)(B,1)$ est le milieu de $[AB]$

III Propriétés

1) Propriété:

Thm1: Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq m}\}$
i) (commutativité) G est inchangé - si l'on ajoute un point de coefficient nul
- si l'on échange des points pondérés (A_j,α_j)
ii) (Homogénéité): $G = \mathrm{Bar}\{(A_i,\lambda\alpha_i)_{1\leq i\leq m}\}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$
iii) (Associativité): G est inchangé si on remplace un ou plusieurs points pondérés par le barycentre correspondant affecté de la somme de leurs coefficients

Exemple: simple pour le iii) si $\dfrac{G}{3} \sim \dfrac{A \mid B \mid C}{1 \mid 1 \mid 1}$ et $\dfrac{I}{2} \sim \dfrac{A \mid B}{1 \mid 1}$ alors $\dfrac{G}{3} \sim \dfrac{I \mid C}{2 \mid 1}$

[iii) i) et ii) sont évidentes.

$G = \mathrm{Bar}\{(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq m}\}$

Soit $J \subsetneq \{1,\dots,m\}$ avec $J \neq \emptyset$ tq $\sum_{j\in J}\alpha_j = m' \neq 0$

alors soit $G' = \mathrm{Bar}\{(A_i,\alpha_i)_{i\in J}\}$

Soit $K = \{1,\dots,m\} \setminus J$ on a alors $K \cup J = \{1,\dots,m\}$ et $K \cap J = \emptyset$

on a $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \iff \underbrace{\sum_{i\in J}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}}_{=\, m'\overrightarrow{GG'} \text{ car } G' = \mathrm{Bar}\{(A_i,\alpha_i)_{i\in J}\}} + \sum_{i\in K}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \iff G = \mathrm{Bar}\{(G',m'),(A_i,\alpha_i)_{i\in K}\}$]

2) Coordonnées barycentriques:

Def: Soit $(E,\vec{E})$ un espace affine de dimension n. Un repère affine de E est une $(n+1)$ liste $(A_0,\dots,A_n)$ de points tq la famille $(\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n})$ soit une base de $\vec{E}$

[i) et ii) sont évidentes.

iii) Soit $G = Bar\{(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le m}\}$

Soit $J \subset \{1,\dots,m\}$ avec $J \neq \emptyset$ et $J \neq \{1,\dots,m\}$ tq $\sum_{j\in J}\alpha_j \neq 0$

alors soit $G' = Bar\{(A_i,\alpha_i)_{i\in J}\} \Leftrightarrow \forall M \in E \quad \left(\sum_{i\in J}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG'} = \sum_{i\in J}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ ⊛

Soit $K = \{1,\dots,m\} \setminus J$ on a $K\cap J = \emptyset$ et $K \cup J = \{1,\dots,m\}$

$$G = Bar\{(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le m}\} \Leftrightarrow \sum_{i\in K\cup J}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i\in J}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} + \sum_{i\in K}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

$$\underset{⊛}{\Leftrightarrow} \left(\sum_{i\in J}\alpha_i\right)\overrightarrow{GG'} + \sum_{i\in K}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow G = Bar\left\{\left(G', \sum_{i\in J}\alpha_i\right), (A_i,\alpha_i)_{i\in K}\right\}$$]

2) Coordonnées barycentriques :

Def : Soit E un espace affine de dimension m. Un repère affine de E est une (m+1) liste $(A_0,\dots,A_m)$ de points telle que la famille $(\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_m})$ est une base de $\vec{E}$.

Thm 2 : Si $(A_0,\dots,A_m)$ est un repère affine de E, alors : ∀ il existe $(\alpha_0,\dots,\alpha_m)$ tq M

i) tout point M de E ~~sera le barycentre~~ de $(A_j,\alpha_j)_{0\le j\le m}$

ii) Si M est à la fois barycentre de $(A_j,\alpha_j)_{0\le j\le m}$ et $(A_j,b_j)_{0\le j\le m}$, les suites $(\alpha_0,\dots,\alpha_m)$ et $(b_0,\dots,b_m)$ sont proportionnelles.

iii) Pour tout $M\in E$, il existe une unique liste $(\alpha_0,\dots,\alpha_m)$ telle que M soit le barycentre de $(A_j,\alpha_j)_{0\le j\le m}$ et $\sum_{j=0}^{m}\alpha_j = 1$

[i) Tout point M s'écrit de façon unique sous la forme

$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overrightarrow{A_0A_i}$ (car $(\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_m})$ est une base de $\vec{E}$ et $\overrightarrow{A_0M}\in\vec{E}$ donc $\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ tq ...)

$$\overrightarrow{A_0M} - \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overrightarrow{MA_i}$$

$$\overrightarrow{A_0M}\left(1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overrightarrow{A_iM} = \vec{0} \Leftrightarrow M = Bar\{(A_0,\underset{=\alpha_0}{1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}),(A_1,\underset{=\alpha_1}{\lambda_1}),\dots,(A_m,\underset{=\alpha_m}{\lambda_m})\}$$

ii) Si $M = Bar\{(A_0,\alpha_0),\dots,(A_m,\alpha_m)\}$ et $M = Bar\{(A_0,b_0),\dots,(A_m,b_m)\}$

$$\left(\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\right)\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=0}^{m}\alpha_i\overrightarrow{A_0A_i} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{i=0}^{m}b_i\right)\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=0}^{m}b_i\overrightarrow{A_0A_i}$$

Donc $$\overrightarrow{A_0M} = \frac{\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\overrightarrow{A_0A_i}}{\sum_{i=0}^{m}\alpha_i} = \frac{\sum_{i=0}^{m}b_i\overrightarrow{A_0A_i}}{\sum_{i=0}^{m}b_i} \Leftrightarrow \forall i\in\{0,\dots,m\} \quad \frac{\alpha_i}{\sum_{i=0}^{m}\alpha_i} = \frac{\beta_i}{\sum_{i=0}^{m}b_i}$$

iii) Conséquence du i) et ii)

Déf : Dans les conditions du thm précédent, la liste $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ est appelée système de coordonnées barycentriques de M dans le repère affine $(A_0, A_1, \dots, A_m)$. Si $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$, on dit que le système de coordonnées barycentriques est normalisé.

Thm 3 : Si $(x_{j1}, \dots, x_{jn})$ désigne les coordonnées de A_j dans un repère affine de E, les coordonnées $(g_1, \dots, g_n)$ de $G = \mathrm{Bar}\{(A_j, \alpha_j), 1 \leq j \leq m\}$ sont $g_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{ji}$

[On considère $\{O_1, \dots, O_m\}$ un repère affine de E.

On peut supposer que les coordonnées de A_j $(\forall j)$ sont normalisées.

ie $\forall j \in [\![1, m]\!]$ $\sum_{i=1}^{m} x_{ji} = 1$

On a donc $\forall j \in [\![1, m]\!]$

$$\begin{array}{c|} A_j \\ \hline \sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \underset{\text{Hypothèse}}{1} \end{array} \overset{\text{Thm2}}{\sim} \begin{array}{c|c|c|c} O_1 & O_2 & \dots & O_m \\ \hline x_{j1} & x_{j2} & \dots & x_{jm} \end{array}$$

$$G = \mathrm{Bar}\{(A_j, \alpha_j)_{1 \leq i \leq m}\} \Leftrightarrow \begin{array}{c|} G \\ \hline \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} A_1 & - - - & A_m \\ \hline \alpha_1 & & \alpha_m \end{array}$$

$\Rightarrow$ Associativité du Barycentre

$$\begin{array}{c|} G \\ \hline \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \end{array} \sim \underbrace{\begin{array}{c|c|c|} O_1 & \dots & O_m \\ \hline \alpha_1 x_{11} & \dots & \alpha_1 x_{1m} \end{array}}_{\sim \begin{array}{c|} A_1 \\ \hline \alpha_1 \end{array}} \underbrace{\begin{array}{c|c|c|} O_1 & \dots & O_m \\ \hline \alpha_2 x_{21} & \dots & \alpha_2 x_{2m} \end{array}}_{\sim \begin{array}{c|} A_2 \\ \hline \alpha_2 \end{array}} \; \dots \; \underbrace{\begin{array}{|c|c|c} O_1 & \dots & O_m \\ \hline \alpha_m x_{m1} & \dots & \alpha_m x_{mm} \end{array}}_{\sim \begin{array}{c} A_m \\ \hline \alpha_m \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} G \\ \hline \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c|c} O_1 & O_2 & \dots & O_m \\ \hline \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{j1}}_{= g_1} & \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{j2}}_{= g_2} & \dots & \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{jm}}_{= g_m} \end{array}$$]

3) Sous espaces affines :

Thm 4 : i) Soit A, B deux pts distincts de E.

La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B.

ii) Soit A, B, C trois points distincts et non alignés de E.

Le plan formé par A, B, C est l'ensemble des barycentres de A, B et C.

[i) $\Rightarrow$ Soit $M \in (AB)$ alors $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\vec{AM} = k\vec{AB}$

$\iff \vec{AM} - k\vec{AM} - k\vec{MB} = \vec{0} \iff \vec{MA}(k-1) - k\vec{MB} = \vec{0}$

$\iff M = \mathrm{Bar}\{(A, k-1), (B, -k)\}$

$\Leftarrow$ Soit $M = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ $\alpha+\beta \neq 0$ on a donc $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = \vec{0} \iff \vec{MA} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$

ie $M \in (AB)$

ii) Même raisonnement.]

Le théorème précédent peut être énoncé de façon plus générale :

Thm 4 : Le sous espace affine engendré par une partie non vide $\mathcal{A}$ de E est l'ensemble des barycentres des points de $\mathcal{A}$

[Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des barycentres des points de $\mathcal{A}$

Montrons $\langle \mathcal{A} \rangle = \mathcal{B}$

Voir les coordonnées barycentriques.

⇓

• $\langle \mathcal{A} \rangle \subset \mathcal{B}$

en effet soit $M \in \langle \mathcal{A} \rangle$, il suffit de considerer un repère affine de $\langle \mathcal{A} \rangle$ en écrivant les coordonnées de M dans le repère affine de $\mathcal{A}$ il on vient que M est barycentre des points de $\mathcal{A}$, donc $M \in \mathcal{B}$

• $\mathcal{B} = \langle \mathcal{A} \rangle$

– Montrons que $\mathcal{B}$ est un sous espace affine.

On fixe $A \in \mathcal{A}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est un sous espace affine revient à montrer que la partie $\{\vec{AM}, M \in \mathcal{B}\}$ est un sous espace vectoriel de $\vec{E}$

soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M, N \in \mathcal{B}$, $\exists K \in E$ tq $\vec{AM} + \lambda\vec{AN} = \vec{AK}$

$\iff \vec{AK} + \vec{KM} + \lambda\vec{AK} + \lambda\vec{KN} = \vec{AK} \iff -\lambda\vec{KA} + \vec{KM} + \lambda\vec{KN} = \vec{0}$

donc K est barycentre de A, M, N qui sont des points de $\mathcal{A}$

(En effet M est un barycentre de pts de $\mathcal{A}$ / N ... $\mathcal{A}$ } donc par l'associativité du Barycentre ...)

donc $K \in \mathcal{B}$ et $\vec{AK} = \vec{AM} + \lambda\vec{AN} \in \{\vec{AM}, M \in \mathcal{B}\}$

Donc $\{\vec{AM}, M \in \mathcal{B}\}$ est un sous espace vectoriel de $\vec{E} \Rightarrow \mathcal{B}$ sea de E.

– $\langle \mathcal{A} \rangle$ est le plus petit espace affine contenant $\mathcal{A}$. $\mathcal{B}$ est un sous espace affine contenant $\mathcal{A}$ montrons $\mathcal{B}$ est le plus petit.

Soit F un sous espace affine contenant $\mathcal{A}$, montrons que $\mathcal{B} \subset F$

Soit $G \in \mathcal{B}$ ie G est le barycentre de $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_m, \alpha_m)$ où $A_i \in \mathcal{A}$ $\forall i$

ie $\forall M \in E$ $m.\vec{MG} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{MA_i}$ Si on prend $M = A_1$ on a :

$m\vec{A_1G} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underbrace{\vec{A_1A_i}}_{\in \vec{F}}$ donc $\vec{A_1G} \in \vec{F}$ et donc $G \in F$ donc $\boxed{\mathcal{B} \subset F}$

]

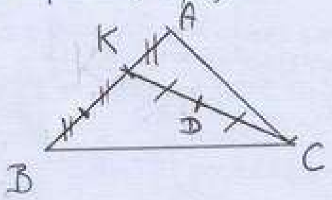
IV Applications :

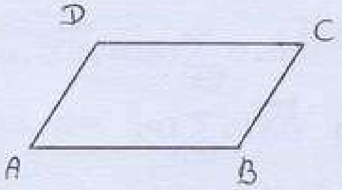
Exercice 1 :

Construction à la règle et au compas du barycentre G du système pondéré $(A,2)$, $(B,5)$, $(C,8)$ avec A, B, C non alignés.

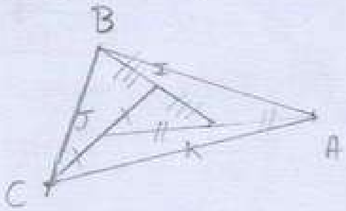
Exercice 2 :

On considère les deux figures suivantes. Exprimer D comme le barycentre des points A, B, C.





Exercice 3 :



Soit A, B, C 3 pts affinement indépendants de E.
Déterminer géométriquement 3 pts I, J, K tel que K milieu de $[JA]$, I milieu de $[KB]$ et J celui de $[IC]$
(ie déterminer coord barycentriques de I, J, K dans le repère affine A, B, C)

Exercice 4 :

Montrer que :
- l'isobarycentre de A et B est le milieu de $[AB]$
- l'isobarycentre d'un triangle ABC est le pt d'intersection des 3 médianes et est situé au $2/3$ de chacunes à partir du sommet correspondant. (ie G centre de gravité de ABC)
- l'isobarycentre d'un tétraèdre $ABCD$ est le point d'intersection des segments joignant chaque sommet au centre de gravité de la face opposé et est situé au $3/4$ de chacun de ces segments à partir du sommet correspondant.

Exo 3 :

$\begin{array}{c} I \\ \hline 2 \end{array} \sim \begin{array}{c|c} B & K \\ \hline 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} K \\ \hline 2 \end{array} \sim \begin{array}{c|c} J & A \\ \hline 1 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{c} J \\ \hline 2 \end{array} \sim \begin{array}{c|c} I & C \\ \hline 1 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{c} I \\ \hline 2 \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} B & J & A \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c|c} B & I & C & A \\ \hline 1 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{array}$

$\begin{array}{c} I \\ \hline 7/4 \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} B & C & A \\ \hline 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}$

Exo 4 :

Soit G_{ABC} isobarycentre du tr ABC

$\begin{array}{c} G_{ABC} \\ \hline 3 \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$

Soit G isobary du tétra $ABCD$

ie $\begin{array}{c} G \\ \hline 4 \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{c} G \\ \hline 4 \end{array} \sim \begin{array}{c|c} G_{ABC} & D \\ \hline 3 & 1 \end{array}$

ie $3\overrightarrow{GG_{ABC}} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{DG_{ABC}} + \overrightarrow{GD} = 0$

ie $4\overrightarrow{DG} = 3\overrightarrow{DG_{ABC}}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DG_{ABC}}$