Exposé 4 :

Description mathématique d'une expérience aléatoire : ensemble des évènements élémentaires, évènements, probabilité (Cas où l'ensemble d'evt élémentaire est fini).

O_Pré-Requis :

- langage ensembliste, cardinal.
- dénombrement élémentaire.

I Description mathématique d'une expérience aléatoire :

1) Définition :

Def : - Une expérience est aléatoire si son résultat est l'effet du hasard et si les différentes issues sont connues.

- L'univers est l'ensemble des issues possibles pour une expérience aléatoire donnée (noté Ω)
- Un évènement est une partie de Ω
- Un évènement est élémentaire s'il est réduit à un seul élément

Notation $\mathcal{P}(\Omega)$: ensemble des parties de Ω

Rq : L'univers dépend du choix de l'expérimentateur. Si on considère le jeu des flechettes : $\Omega = \mathbb{R}^+$ si on considère la distance en mm de la flechette au centre

$\Omega = \mathbb{R}^2$ si on considère les coordonnées de la flechette dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est le centre de la cible.

Exemple (d'expérience aléatoire) : lancer de dé et regarder le chiffre obtenu.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A = "Obtenir un chiffre pair."

B = " —— le —— 1 "

A et B sont des évènements, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$

B est élémentaire.

2) Lien entre expérience aléatoire, langage probabiliste et ensembliste

ex : lancer de dé	langage probabiliste	langage ensembliste.
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$	univers ou l'ensemble des issues	Ω ensemble.
$1 \in \Omega$	une issue ou une probabilité	$1 \in \Omega$
A "Obtenir un chiffre pair".	évènement	$A \in \mathcal{P}(\Omega)$
"Obtenir le chiffre 1"	évènement élémentaire	$\{1\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
"Obtenir un chiffre ≤ 6"	évènement certain	$\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$
"Obtenir un chiffre > 6"	évènement impossible	$\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$
C "obtenir le chiffre 2"	la réalisation de C entraine celle de A	$C \subset A$
B : "Obtenir un chiffre impair"	évènement contraire de A	$B = \bar{A}$, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$
D : " —— ≤ 5 "	D et C D ou C évènement incompatible	$C \cap D$ $C \cup D$ $C \cap B = \emptyset$ parties disjointes.
$a \in A$	$\{a\}$ réalise l'evt A.	Evènement élémentaire $\{a\}$

I Probabilités sur un ensemble fini

Ω fini ie $\Omega = \{a_i,\ 1 \leq i \leq m\}$

Def: Une probabilité est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que
$$A \to P(A)$$

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propriétés:

i) $P(\emptyset) = 0$

iv) $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$

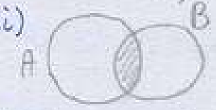
ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

vi) $P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$ si $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i,j \in [1,m]$, $i \neq j$

v) $\forall A \in P(\Omega)$, $0 \leq P(A) \leq 1$

[iii)



$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ unions disjointes

$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B)$
$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\ ]$$

iv) $A \subset B \overset{?}{\Rightarrow} p(A) \leq p(B)$

$A \subset B$ ie $B = A \cup (B \setminus A)$ union disjointe

ie $p(B) = p(A) + \underbrace{p(B \setminus A)}_{\geq 0}$ ie $p(B) \geq p(A)$

v) $A \subset \Omega$ ie $0 \leq p(A) \leq 1$]

Prop: Autre expression (Equivalente) Une probabilité est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ tq

- $P(\emptyset) = 0$
- si $p_i = P(\{a_i\})$ alors $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ (car $\Omega = \{a_i,\ 1 \leq i \leq m\}$)
- si $A \in P(\Omega)$, $A \neq \emptyset$ $P(A) = \sum_{i \text{ tq } a_i \in A} p_i$

Def. Il y a équiprobabilité sur Ω si $p_1 = \cdots = p_m = \frac{1}{\operatorname{card} \Omega}$

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\boxed{P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}}$

Application: Dans une classe, on a des élèves qui apprennent différentes langues. Certains étudient l'espagnol, l'allemand, les deux ou aucune des deux.

E : "apprendre l'espagnol" $P(E) = 0,6$

A : "apprendre l'allemand." $P(A) = 0,3$

$A \cap E$: "apprendre les deux langues" $P(A \cap E) = 0,1$)

a) Probabilité qu'un élève apprenne au moins une des deux langues.

b) Probabilité qu'un élève apprenne aucune des deux langues.

Ω = {élèves de la classe}

$A \cup B$: "apprendre au moins une des deux langues."

$p(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}8$

$\overline{A \cup B}$: "apprendre aucune langue"

$p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 0{,}2$

Exercice 2 :

Une urne contient 6 boules blanches et 5 boules rouges

On tire 4 boules et on examine leurs couleurs. (On tire les quatre boules en même temps)

a) Probabilité que les quatre boules soient blanches

b) Probabilité qu'au moins une boule soit rouge.

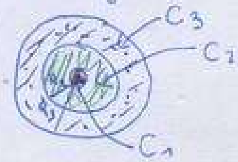
Exercice 1 :

Lancer de pièce équilibrée.

On lance 4 fois une pièce. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois "pile"

Exercice 3 :

On lance une flèche on suppose qu'elle tombe au moins dans le plus grand cercle.



1) Chercher la probabilité que la flèche tombe dans le rouge.

————————————————— le vert

————————————————— le bleu.

E1 : partie rouge.

E2 = partie verte

E3 : partie bleue

C1 rayon 1

C2 —— 2

C3 —— 3

Rq : Les cas 1 et 2 sont équiprobables pas le 3.

Exercice 1 :

Ω = {4 listes de l'ensemble (P, F)}

card $\Omega = 2^4$

A : "Obtenir au moins une fois pile"

exemple : (P, P, F, F) ou (F, P, F, F)

$B = \overline{A}$: "obtenir 4 fois faces"

card B = 1 $\quad P(B) = \dfrac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \dfrac{1}{16}$

$P(A) = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$

Exercice 2 : Rq tirages équiprobables = tous les quadruplets ont la m̂ probabilité d'être traité

$\Omega = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \{B, R\}\}$

A : "les quatres boules st blanches"

B : "au moins une boule est rouge"

? pas mis

Card $\Omega = C_{m}^{4}$

Card $A = C_6^4 \times C_5^0$

$P(A) = \dfrac{C_6^4}{C_{11}^4} = \dfrac{5}{22}$

$P(B) = 1 - P(A)$

Exercice 3 :

$\Omega = \{E_1, E_2, E_3\}$

il faut calculer la surface de chacun

Surface $C_1 = \pi$

surface $C_2 = 4\pi$

Surface $C_3 = 9\pi$

Surface $E_1 = \pi$ (C_1)

— $E_2 = 3\pi$ $(C_2 - C_1)$

surface $E_3 = 5\pi$ $(C_3 - C_2)$

$\Rightarrow P(E_1) = \dfrac{1}{9}$ $P(E_2) = \dfrac{1}{3}$ $P(E_3) = \dfrac{5}{9}$