Exposé 39

Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension 3. Point de vue géométrique, analytique. Applications

0 - Pré-Requis :

- base et repère
- vecteurs
- orthogonalité
- calculs d'aires et distances.

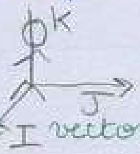
Cadre : E espace affine euclidien orienté. $\vec{E}$ esp vectoriel associé.

I Point de vue géométrique :

Rappel : Bonhomme d'Ampère.

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ base de $\vec{E}$. O un point de E. $\vec{OI}=\vec{i}$, $\vec{OJ}=\vec{j}$, $\vec{OK}=\vec{k}$

Pour un observateur qui a les pieds en O, la tête en K et qui regarde I, si J est à sa gauche, alors $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ directe



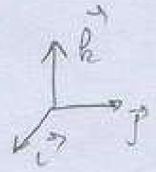
1) Définition :

Déf : $\vec{u},\vec{v}\in\vec{E}$, $\vec{u},\vec{v}$ non nuls. On définit le produit vectoriel de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ par le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires, $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
- sinon
  - $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ directe
  - $\vec{u}\wedge\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
  - $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\vec{u},\vec{v})|$

Ex : $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ BOND alors $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$ et $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$



2) Propriétés :

lemme : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

[$\Rightarrow$ déf.

$\Leftarrow$ $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=0=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\||\sin(\vec{u},\vec{v})|$ $\Rightarrow \sin(\vec{u},\vec{v})=0$

$\Rightarrow (\vec{u},\vec{v})=0\ [\pi]$

Propriétés : $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\vec{E}$, $k\in\mathbb{R}^*$

1. $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$
2. $(k\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(k\vec{v})=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$
4. $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

II Point de vue analytique :

Propriété $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ BOND $\Rightarrow$ calcul pratique.

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}y&y'\\z&z'\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}z&z'\\x&x'\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}x&x'\\y&y'\end{vmatrix}\end{pmatrix}$ $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}yz'-y'z\\zx'-z'x\\xy'-x'y\end{pmatrix}$

[$\vec{u}\wedge\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$

Exercice : R ROND

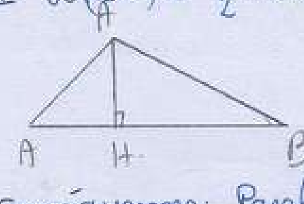
$A\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$

III. Applications :

1) calcul d'aire :

Prop : ABC triangle non aplati $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

II $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} AB \times CH$ $\quad |\sin(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{CH}{AC}$



{ Il faut faire l'inverse
$\mathcal{A}$ parallélogramme = l'aire d'un triangle
et on en déduit

Conséquences : Parallélogramme ABCD. $\mathcal{A}(ABCD) = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

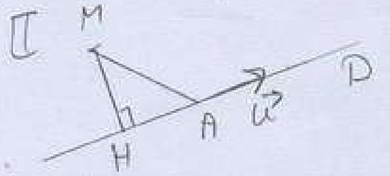
2) Distances :

a) d'un point à une droite.

$D(A, \vec{u})$

Prop : $d(M, D) = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

II



$d(M,D) = MH$ où $H = proj_{\perp D}(M)$

$\|\vec{MA} \wedge \vec{u}\| = \|(\vec{MH} + \vec{HA}) \wedge \vec{u}\|$

$= \|\vec{MH} \wedge \vec{u}\| = MH \cdot \|\vec{u}\|$

Exercice : Quel est l'ensemble des pts M qui vérifient $\vec{MA} \wedge \vec{MB} = r$ où A et B st des pts donnés et $r > 0$.

b) d'un point à un plan :

$\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$

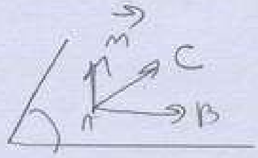
Prop : $M \in E$, $M \notin \mathcal{P}$, $d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$

c) 2 droites non coplanaires.

$D(A, \vec{u})$ $\quad D'(B, \vec{v})$

$d(D, D') = \frac{|\vec{AB} (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$

3) Equation du plan :



$\mathcal{P}$ un plan $A, B, C \in \mathcal{P}$. $\vec{n}$ vecteur normal.

$\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ normal à $\mathcal{P}$

$M \in (ABC) \Rightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$

Exemple : $A\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix}x\\y\\3\end{pmatrix}$

$\vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$ $\quad (\mathcal{P}) : x + y - 1 = 0$

Il faut préciser la dimension de l'espace affine (ici 3)

Que veut dire plan affine ... orienté ?

$\Rightarrow$ On fixe une base de référence et si on prend une nv base.

La nv base de l'ancienne a un det $> 0 \Rightarrow$ base directe.

$< 0 \Rightarrow$ base indirecte.

Autre manière de définir le produit vectoriel :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- sinon, soit $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ une base orthonormé du plan $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, que l'on complète en une base orthonormée directe $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de l'espace.

alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})\, \vec{k}$ où l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est mesuré relativement à la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$

[Dans cette autre définition cela ne dépend pas de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ choisit. Si on en prend une autre orienté ds l'autre sens alors on obtient $-\vec{k}$ et $\underbrace{\sin(\vec{u}, \vec{v})}_{\text{de la nv base}} = -\underbrace{\sin(\vec{u}, \vec{v})}_{\text{de l'ancienne base}}$

Donc les 2 $-$ s'annulent et si on a une autre base orienté de la $\hat{m}$ façon est encore plus évidente.]

Lemme : [$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ colinéaire à } \vec{v} \\ \text{ou} \\ 0 = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \end{cases}$

Démo des propositions.

1) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

[$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|-\vec{v} \wedge \vec{u}\|$ $\quad \begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v} \\ \vec{v} \wedge \vec{u} \perp \vec{u}, -\vec{v} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ directe} \\ (\vec{v}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ indirecte} \\ (\vec{v}, \vec{u}, -\vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ directe.} \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

② $k \in \mathbb{R}^*$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ non colinéaires.

- direction
- norme

$\|(k\vec{u}) \wedge \vec{v}\| = \|k\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})|$

$k \geq 0$ $\quad = |k| \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$

$k < 0$ $-k > 0$

$\|k\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|(-k(-\vec{u})) \wedge \vec{v}\| = -k \|-\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u} \wedge k\vec{v}\|$
$= |k| \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

- sens dépend du signe k. $(\vec{u}, \vec{v}, k\vec{u} \wedge \vec{v})$ directe si $k > 0$
indirecte sinon.

Avec l'autre définition du produit vectoriel :

$(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \|\lambda\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\lambda\vec{u}, \vec{v}) \vec{k} = |\lambda| \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \times \frac{\lambda}{|\lambda|} \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{k}$

$= \lambda \vec{u} \wedge \vec{v}$

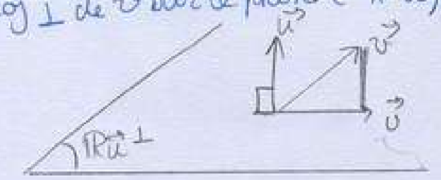
Rq. Il y a une troisième définition
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) =$ volume du parallélépipède.

[③ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}'$

$\vec{v}' =$ proj $\perp$ de $\vec{v}$ sur le plan $(\mathbb{R}\vec{u})^\perp$

Rq : ~~Ok~~ Il faudrait mettre ça en propriété avant.



$\Rightarrow |\sin(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{\|\vec{v}'\|}{\|\vec{v}\|}$

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}'\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}'\| |\sin(\vec{u}, \vec{v}')|$

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}'\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}'\|$

$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})|$

$= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

$\vec{v}' \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

Démo avec l'autre déf.

$\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{j}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et de norme 1 $\Rightarrow \vec{v}' = \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{j}$

Retour à la démo :

p proj $\perp$ sur $(\mathbb{R}u)^{\perp}$

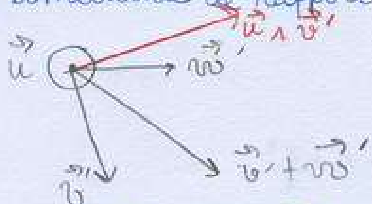
$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$

$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})' = \vec{u} \wedge (\vec{v}' + \vec{w}') = \vec{u} \wedge \vec{v}' + \vec{u} \wedge \vec{w}'$?

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}'$

$\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w}'$

s similitude de rapport $\|\vec{u}\|$ et d'angle $\pi/2$



$\vec{u} \wedge \vec{v}' = s(\vec{v}')$ or une similitude est une appli linéaire

$s(\vec{v}' + \vec{w}') = s(\vec{v}') + s(\vec{w}')$

$\vec{u}' \wedge (\vec{v}' + \vec{w}') = \vec{u} \wedge \vec{v}' + \vec{u} \wedge \vec{w}'$