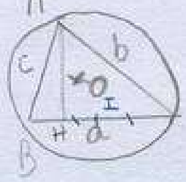
Exposé 38 :

Relations métriques dans un triangle quelconque et trigonométriques. Applications.

0 - Pré-Requis :

- produit scalaire
- Relation de chasles.
- Théorème de l'angle inscrit.
- formule trigonométriques.

Cadre : $(P, \vec{P})$ plan affine euclidien orienté.
ABC un triangle non applati ($(P, \vec{P})$ orienté de sorte que ABC soit direct).



$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ les mesures dans $]0, \pi[$ des angles géométriques de ABC.

Rappel : angle géométrique $\widehat{BAC}$ correspond 2 angles orientés de vecteurs : $(\vec{AB}, \vec{AC})$ et $(\vec{AC}, \vec{AB})$.

I Relations entre cotés et angles :

1) Formule d'Al Kashi

Thm : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$[$ $BC^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\vec{AC} \cdot \vec{AB} = AC^2 + AB^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Corollaire : (Pythagore) ABC rectangle en $\hat{A} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$[$ $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\cos \hat{A} = 0$ $]$

Corollaire i) ABC isocèle en A $\Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C}$

ii) ABC équilatéral $\Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$

$[$ Al Kashi : $\cos \hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ et $\cos \hat{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose ABC isocèle en A (ie $b = c$) $\cos \hat{B} = \dfrac{a}{2c}$ et $\cos \hat{C} = \dfrac{a}{2b}$

$\Rightarrow \cos \hat{B} = \cos \hat{C}$
$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ car $\hat{B}, \hat{C} \in]0, \pi[$ or cos injectif sur $]0, \pi[$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\hat{B} = \hat{C}$ on a $\dfrac{AH}{c} = \sin \hat{B}$ et $\dfrac{AH}{b} = \sin \hat{C}$ $\Rightarrow \boxed{b = c}$ $]$

2) Théorème de la médiane :

Thm : i) $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

ii) $AB^2 - AC^2 = 2\,\overline{BC} \cdot \overline{IH}$

[[$AB^2 + AC^2 = (\vec{AI} + \vec{IB})^2 + (\vec{AI} + \vec{IC})^2$

$= 2AI^2 + IB^2 + IC^2 + 2\vec{AI}\,(\underbrace{\vec{IB} + \vec{IC}}_{=\vec{0}})$

$= 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

$AB^2 - AC^2 = (\vec{AB} - \vec{AC})(\vec{AB} + \vec{AC})$

$= \vec{CB} \cdot (2\vec{AI} + \underbrace{\vec{IB} + \vec{IC}}_{=\vec{0}})$

$= 2\vec{BC} \cdot \vec{IA}$

$= 2\vec{BC} \cdot (\vec{IH} + \vec{HA}) = 2\vec{BC} \cdot \vec{IH}$ car $(HA) \perp (BC)$

$= 2\overline{BC} \cdot \overline{IH}$ car $I, H \in (BC)$.]]

Corollaire : i) ABC est isocèle en $A \Leftrightarrow$ la médiane issue de A est la hauteur.

ii) ABC rectangle en $A \Leftrightarrow A \in \mathcal{C}_{[BC]}$.

[[i) ABC isocèle en $A \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = 0 \Leftrightarrow 2\overline{BC} \cdot \overline{IH} = 0 \Leftrightarrow \overline{IH} = 0$

$\Leftrightarrow I = H$.

ii) ABC rectangle en $A \underset{\text{pythagore}}{\Leftrightarrow} AB^2 + AC^2 = BC^2 \underset{\text{thm médiane}}{\Leftrightarrow} 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2} = BC^2 \Leftrightarrow 4AI^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow AI = \dfrac{BC}{2}$]]

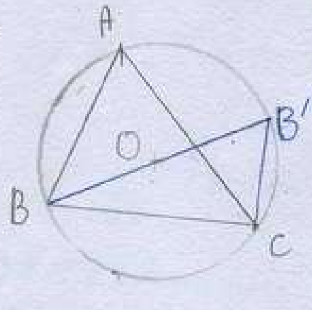
$\Leftrightarrow$ ie $A \in \mathcal{C}_{[BC]}$

car $AI = IB = IC$]]

3) Loi des sinus :

Thm : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$ où R rayon du cercle circonscrit.

[[



Soit $B' = s_O(B)$

D'après le thm de l'angle inscrit :

$(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{B'B}, \vec{B'C})\ [2\pi]$

or avec les relations trigonométriques :

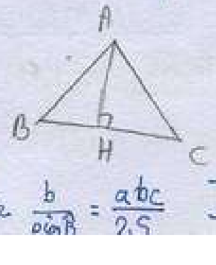
$\sin\hat{A} = |\sin(\vec{AB}, \vec{AC})| = |\sin(\vec{B'B}, \vec{B'C})|$

$= \sin\hat{B'} = \dfrac{a}{2R}$

Même chose pour $\dfrac{\sin\hat{B}}{b} = \dfrac{\sin\hat{C}}{c}$]]

II. Aire du triangle :

Thm : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = 2R = \dfrac{abc}{2S}$ où $S = \mathcal{A}_{ABC}$



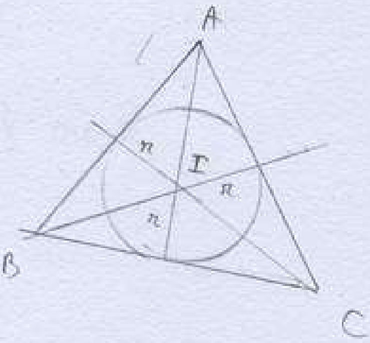
[[$AH = c\sin\hat{B}$ $\quad S = \dfrac{1}{2} BC \times AH = \dfrac{1}{2} ac\sin\hat{B} \Rightarrow bS = \dfrac{1}{2} abc\sin\hat{B}$

ie $\dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{abc}{2S}$]]

Formule de Heron : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

III. Applications :

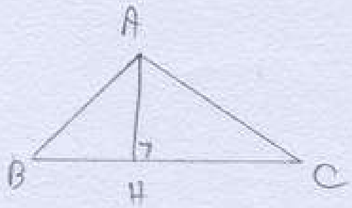
1) Rayon du cercle inscrit :



Prop : $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$

$$\left[\ \left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_{(AIC)} = \dfrac{AC \times r}{2} \\[2mm] \mathcal{A}_{(BIC)} = \dfrac{BC \times r}{2} \\[2mm] \mathcal{A}_{(AIB)} = \dfrac{AB \times r}{2} \end{array}\right\} \quad S = \frac{r}{2}(AB + AC + BC) \quad \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{2S}{a+b+c}}\right.$$

2) Relation sur les hauteurs :



$$AH = a\,\frac{\sin\hat{B}\,\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$$

$$\left[\ AH = c\sin\hat{B} = c\,\frac{\sin\hat{B}\,\sin\hat{C}}{\sin\hat{C}}\right.$$

or $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$ d'où $AH = a\,\dfrac{\sin\hat{B}\,\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$]

3) Prop : Mq ABC rectangle en A $\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$

[$\hat{A} = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \sin\hat{A} = 1$ $\qquad \hat{B} = \dfrac{\pi}{2} - \hat{C}$ ie $\sin\hat{B} = \cos\hat{B}$

ie $\underset{\cos^2\hat{B}}{\underset{\parallel}{\sin^2\hat{B}}} + \sin^2\hat{C} = 1 = \sin^2\hat{A}$

Exposé 38 : Demonstrations :

Formule de Heron :

d'après Al Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ d'où $\cos \hat{A} = \dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$

$S = \dfrac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ d'où $\sin \hat{A} = \dfrac{2S}{bc}$

$\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$

$$\frac{(-a^2+b^2+c^2)^2}{4b^2c^2} + \frac{4S^2}{b^2c^2} = 1 \Leftrightarrow (-a^2+b^2+c^2)^2 + 16S^2 = 4b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 16S^2 = 4b^2c^2 - (-a^2+b^2+c^2)^2$$

$$16S^2 = (2bc - (b^2+c^2-a^2))(2bc + (b^2+c^2-a^2))$$

$$16S^2 = (a^2 - (b-c)^2)((b+c)^2 - a^2)$$

$$16S^2 = (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)$$

or $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$

$$16S^2 = (2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)2p$$

$$16S^2 = 16(p-b)(p-c)(p-a)p$$