Exposé 35 :

Le cercle : Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.

Cadre : On se place dans $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$ un plan affine euclidien muni d'un rom $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0 - Pré-Requis :

- Produit scalaire - Projection orthogonale.
- Pythagore, distance d'un point à une droite : $M\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ $D : ax+by+c$ $\quad d(M,D) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- Equation cartésienne d'une droite.

I Le cercle

1) Généralités :

Def : (Cercle) On appelle cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$, de rayon $R>0$, l'ensemble $\mathcal{C}(\Omega,R) = \{M \in \mathcal{P} \mid \Omega M = R\}$.

Def : On dit que $M \in \mathcal{P}$ est à l'intérieur de $\mathcal{C}(\Omega,R)$ si $M\Omega < R$

——— à l'extérieur de $\mathcal{C}(\Omega,R)$ si $M\Omega > R$

Def Deux cercles sont concentriques s'ils ont le même centre.

Def : Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega,R)$ un cercle. Si $A, B \in \mathcal{C}$ et si $\Omega \in [AB]$ alors $[AB]$ est un diamètre du cercle.

Prop : L'ensemble $\{M \in \mathcal{P} \mid \vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0\}$ est un cercle de centre le milieu de $[AB]$ et de rayon $\frac{AB}{2}$

[Soit Ω = milieu de $[AB]$ alors $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0 \Leftrightarrow (\vec{M\Omega}+\vec{\Omega A})(\vec{M\Omega}+\vec{\Omega B}) = 0$

$\Leftrightarrow M\Omega^2 - \Omega B^2 = 0$ car $\vec{\Omega A} = -\vec{\Omega B}$

$\Leftrightarrow \Omega M = \Omega B$ ie $M \in \mathcal{C}(\Omega, \frac{AB}{2} = \Omega B)$]

2) Equation cartésienne du cercle :

Thm : Soit $\mathcal{C}(\Omega,R)$ le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R. Une équation cartésienne du cercle s'écrit : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ avec $c = a^2+b^2-R^2$

Inversement, si (a^2+b^2-c) est positif, toute équation de ce type détermine un cercle de rayon $\sqrt{a^2+b^2-c}$ dont le centre a pour coordonnée (a,b)

[Soit $M(x,y)$ un point de $\mathcal{C}(\Omega,R)$ où $\Omega(a,b)$

$M(x,y) \in \mathcal{C}(\Omega,R) \Leftrightarrow \Omega M^2 - R^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

avec $c = a^2+b^2-R^2$]

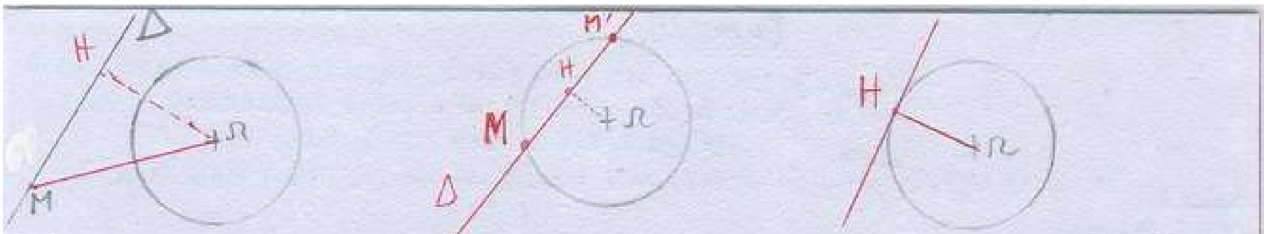
II Position Relative entre une droite et un cercle :

Prop : Soit Δ un droite et un cercle $\mathcal{C}(\Omega,R)$

i) Si $d(\Omega,R) > R$, Δ et $\mathcal{C}$ ne se rencontrent pas.

ii) Si $d(\Omega,R) < R$, Δ et $\mathcal{C}$ ont exactement deux pts communs.

iii) Si $d(\Omega,R) = R$, Δ et $\mathcal{C}$ ont un seul point commun.



[Preuve géométrique :

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur Δ : $d(\Omega,\Delta) = \Omega H$. Un point $M \in \Delta$ est sur $\mathcal{C}$ ssi $\Omega M^2 = R^2$ d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = d(\Omega,\Delta)^2 + HM^2$$

et $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $HM^2 = R^2 - d(\Omega,\Delta)^2$

Il existe zéro, deux ou une solution à cette équation selon que le second membre est strict négatif, strict positif ou nul.

Point de vue analytique :

Soit $\mathcal{C}(\Omega,R)$ On considère $\mathcal{R}(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ un ron et $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{\Omega H}}{\|\overrightarrow{\Omega H}\|}$

dans ce repère $\mathcal{C}$ a pour eq cartésienne : $x^2+y^2=R^2$

Δ a pour équation : $x = d$ où $d = d(\Omega,\Delta)$

Alors $M \in \mathcal{C}(\Omega,R)\cap\Delta \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x=d \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{y^2 = R^2-d^2}}$

D'où si $d<R$ absurde donc $M\cap\Delta=\emptyset$ (car $\underset{\geq 0}{y^2} = \underset{<0}{R^2-d^2}$)

si $d=R$ 1 seul point solution : $M(d,0)$

si $d>R$ 2 points solutions $M(d,\sqrt{R^2-d^2})$ et $M'(d,-\sqrt{R^2-d^2})$]

Def : Si $d(\Omega,\Delta)=R$, $\Delta\cap P=\{M\}$, Δ est appelée droite tangente à $\mathcal{C}$ passant par M.

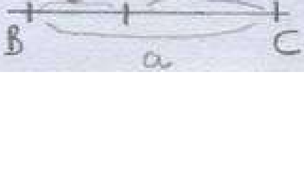
II. Position relative de deux cercles :

Thm : Etant donnés trois réels positifs a,b,c, il existe un triangle dont les segments des cotés sont de longueurs $a,b,c \Leftrightarrow |b-c| \leq a \leq b+c$

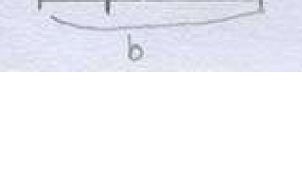
Rq :- Si les inégalités sont strictes, il y a exactement deux triangles symétriques par rapport à [CB]

$a<b+c$

_ Si une de ces inégalités est une égalité alors il existe un unique triangle, le triangle plat.



$a=b+c$ $|b-c|=a$

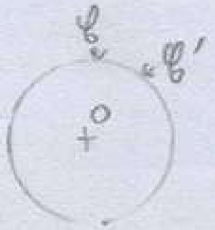


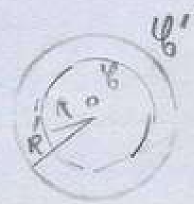
1) Cercles concentriques :

Soit $\mathcal{C}(O,R)$ et $\mathcal{C}'(O,R')$

Prop : Si $R=R'$, $\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'=\mathcal{C}=\mathcal{C}'$

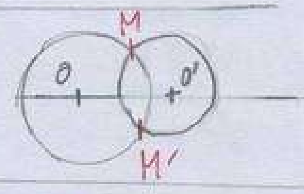
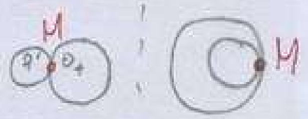
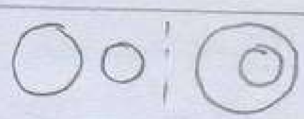
Si $R\neq R'$, $\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'=\emptyset$





2) Cercles non concentriques :

Soit $\mathcal{C}(O,R)$ et $\mathcal{C}'(O',R')$

Condition	$\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'$	Remarques	Dessin
$\lvert R-R'\rvert < d < R+R'$	2 points	Les deux points sont symétriques par rapport à (OO')	
$d=\lvert R-R'\rvert$	1 point	$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents (tangents intérieurs) ou extérieurs.	
$d<\lvert R-R'\rvert$	$\emptyset$	$\mathcal{C}$ extérieur ou (intérieur) à $\mathcal{C}$	

[[Preuve analytique :

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\vec{i}=\dfrac{\overrightarrow{OO'}}{\|\overrightarrow{OO'}\|}$, $\mathcal{C}: x^2+y^2=R^2$ $\quad\mathcal{C}': (x-d)^2+y^2=r^2$

$$M\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}' \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ (x-d)^2+y^2=r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=R^2 & (1) \\ x^2-2dx+d^2+y^2=r^2 \end{cases}$$

$$2dx-d^2=R^2-r^2$$

$$x=\frac{R^2+d^2-r^2}{2d}$$

$$(1)\Leftrightarrow y^2=R^2-x^2=R^2-\frac{(R^2-r^2+d^2)^2}{4d^2}$$

$$y^2=\frac{1}{4d^2}\left[4d^2R^2-(R^2-r^2+d^2)^2\right]=\frac{1}{4d^2}\left[(2dR+R^2-r^2+d^2)(2dR-R^2+r^2-d^2)\right]$$

$$y^2=\frac{1}{4d^2}\left[\left((R+d)^2-r^2\right)\left(r^2-(R-d)^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4d^2}\left[(R+d-r)(R+d+r)(r-R+d)(r+R-d)\right]$$

Il suffit d'étudier le signe de $(R+d-r)(R+d+r)(r-R+d)(r+R-d)$

$y^2\geqslant 0$ et donc si $(R+d-r)(R+d+r)(r-R+d)(r+R-d)=0 \Rightarrow$ 1 seule solution $y=0$

si $\underline{\hspace{6cm}} <0 \Rightarrow$ 0 solution

si $\underline{\hspace{6cm}} >0 \Rightarrow$ 2 solutions $-\sqrt{(\ )(\ )(\ )(\ )}$ et $\sqrt{(\ )(\ )(\ )(\ )}$

d	0		$\lvert R-r\rvert$		$R+R'$	
Signe de $(R+d+r)(R+d-r)(R+r-d)(r-R+d)$		$-$	0	$+$	0	
nbr de solution.		0	1	2	1	0

<u>Preuve géométrique :</u>

Soit $OM = R$ et $OM' = r$ et $OO' = d$

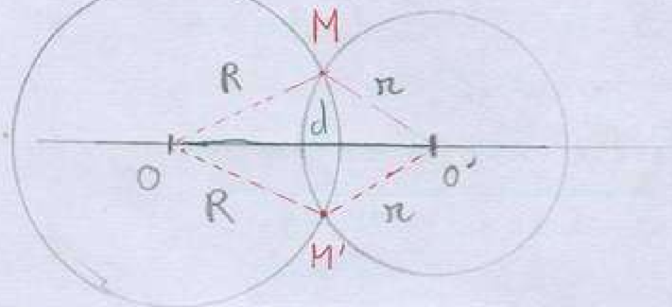
Supposons qu'il existe $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$.

Par l'inégalité sur $OO'M$ (d'après le théorème précédent)

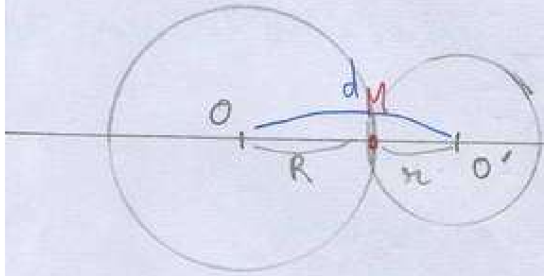
on a $|R-r| \leq d \leq R+r$ (si $d > R+r$ ou $d < |R-r|$
on a n'a pas de solution.
celà contredit l'inégalité triangulaire
le triangle $OO'M$ existe $\Leftrightarrow |R-r| \leq d \leq R+r$).

Avec le théorème précédent on trouve donc deux solutions

si $|R-r| < d < R+r$



Si on a égalité $d = R+r$



Si on a égalité $|R-r| < d$