Exposé 34.

Définitions et propriétés du produit scalaire dans le plan. Expression dans une base orthonormale. Applications.

0 - Pré-Requis :

- Notion de distances.
- vecteurs : normes ($\|\vec{u}\| = AB$ si $\vec{u} = \vec{AB}$), orthogonalité, colinéarité.
- projection orthogonale.
- Base orthonormale
- Angles orientés.
- Pythagore.

Cadre : P plan affine, $\vec{P}$ plan vectoriel associé.

Intro : Le produit scalaire a de nombreuses applications, notamment en mécanique où on a besoin du ps pour calculer le travail élémentaire d'une force donné par la relation $dw = \vec{F}.\vec{dP}$ M $\vec{dP}$ $\vec{F}$ — $\vec{F}$ force agissant sur M, $\vec{dP}$ déplacement élémentaire

I Produit scalaire de 2 vecteurs :

Déf : Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{P}$. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u}.\vec{v}$, le réel défini par : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Rq : i) Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

ii) $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$

iii) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ } Découle de la définition.

iv) $\vec{u}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

On en déduit que ps est forme définie positive.

Thm : $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

[Si $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ Soit $A, B, C \in P$ tq $\vec{u} = \vec{AB}$ $\vec{v} = \vec{AC}$

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) = 0$

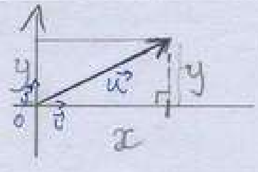
$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 - CB^2 = 0$

$\Leftrightarrow ABC$ rectangle en A et $\vec{AB} \perp AC$

$\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$]

II Expression du produit scalaire dans une base orthonormale

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une bon et $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un ron



Prop : $\boxed{\text{Soit } \vec{u}, \vec{v} \in \vec{P} \text{ tq } \begin{cases} \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \end{cases} \quad \text{alors } \vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$

[Tout d'abord d'après pythagore $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

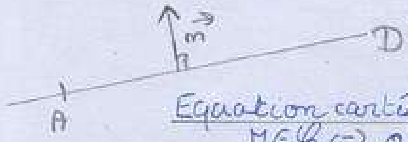
On applique donc la définition : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

ie $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2\right) = xx' + yy'$]

<u>Applications</u> : Equation cartésienne d'une droite dans une bon

Do $(O,\vec{i},\vec{j})$ Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan de vecteur normal $\vec{m}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

et $A\in\mathcal{D}$ $A=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$



On a $M\in\mathcal{D}, M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \vec{AM}\perp\vec{m}$

$\iff \vec{AM}\cdot\vec{m}=0 \iff a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

cette équation est appelée eq cartésienne de $\mathcal{D}$.

<u>Equation cartésienne d'un cercle :</u>

$M\in\mathcal{C} \iff OM^2=r^2 \iff \vec{OM}\cdot\vec{OM}=r^2 \iff \underline{x^2+y^2=r^2}$ avec $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

III <u>Propriétés du produit scalaire.</u>

1) <u>Propriétés :</u>

i) $\forall\vec{u},\vec{v}\in\vec{\mathcal{P}}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

ii) $\forall k\in\mathbb{R}, \forall\vec{u},\vec{v}\in\vec{\mathcal{P}}$ $k\vec{u}\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$

iii) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$

iv) $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

v) $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

[Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ bon d'après II on a expression du ps do $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ Soit $k\in\mathbb{R}$

i) $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'=\vec{v}\cdot\vec{u}$

ii) $k\vec{u}\cdot\vec{v}=k(xx'+yy')=x(kx')+y(ky')=\vec{u}\cdot k\vec{v}$

iii) Découle de la def du I.

iv) $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=x(x'+x'')+y(y'+y'')=xx'+yy'+xx''+yy''=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

v) On applique les prop précédentes comme $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ ...]

2) <u>Inégalité de Cauchy Schwartz</u>

Thm : Soit $\vec{u},\vec{v}\in\vec{\mathcal{P}}$ alors $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

avec égalité ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

[Etudier le signe du trinôme en λ obtenu en développant $\|\lambda\vec{u}+\vec{v}\|^2$]

Rq : Les propriétés ii) et iv) montre que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est une forme bilinéaire

i) montre que le ps est symétrique et on a vu $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$

donc p.s définie positive. et $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \iff \vec{u}=0$

Le produit scalaire est donc une forme bilinéaire définie positive. symétrique. Donc si on muni $\mathcal{P}$ du produit scalaire alors $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien.

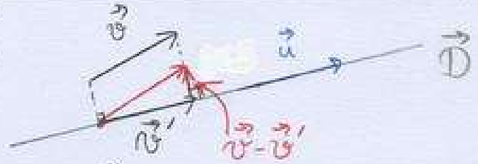
IV <u>Autres expressions du produit scalaire :</u>

1) <u>Avec le projeté orthogonale :</u>

Thm : Soit $\vec{u},\vec{v}\in\vec{\mathcal{P}}$, $\vec{v}'=\mathrm{proj}_{\perp}(D)(\vec{v})$ où D est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$

alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}'$

[



On a $\vec v - \vec v' \perp \vec u \iff \vec u(\vec v - \vec v') = 0$

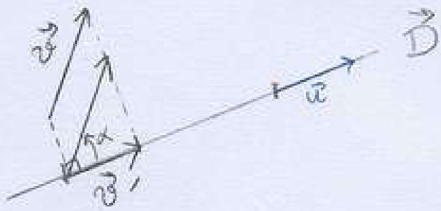
$\iff \vec u \vec v - \vec u \vec v' = 0$

$\iff \vec u \cdot \vec v = \vec u \cdot \vec v'$]

2) Avec le cosinus :

Prop : Soit $\vec u, \vec v \neq \vec 0$ alors $\vec u \cdot \vec v = \|\vec u\| \|\vec v\| \cos(\vec u, \vec v)$

[



$\vec v' = \|\vec v\| \cos(\vec u, \vec v) \frac{\vec u}{\|\vec u\|}$

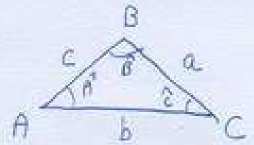
or $\vec u \cdot \vec v = \vec u \cdot \vec v' = \vec u \cdot \left(\frac{\|\vec v\|}{\|\vec u\|} \cos(\vec u, \vec v)\, \vec u \right)$

$= \frac{\|\vec u\|^2}{\|\vec u\|} \|\vec v\| \cos(\vec u, \vec v) = \|\vec u\| \|\vec v\| \cos(\vec u, \vec v)$

]

V Applications :

1) Al Kashi. Soit ABC un triangle ~~non aplati~~ quelconque



Mq $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat A$

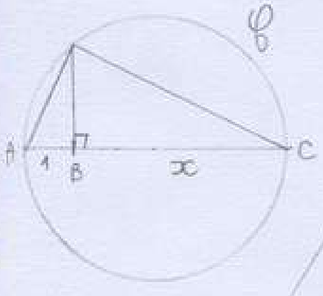
2) Calcul de distance :

$M_0 \binom{x_0}{y_0}$ $\quad D : ax + by + c = 0 \quad (a,b) \neq (0,0)$ dans $(O, \vec i, \vec j)$ r.o.n

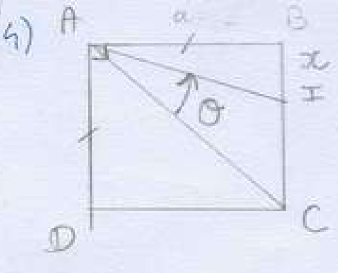
Mq $d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

3) Construction de $\sqrt{x}$ à la règle et au compas.

Soit [AB] et [BC] deux segments tq $B \in [AC]$ tq $AB = 1$ et $BC = x$
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [AC]. Soit Δ la perpendiculaire à [AC] passant par B. On note $\{I\} = \Delta \cap \mathcal{C}$. Mq $BI = \sqrt{x}$ en évaluant $\vec{IA} \cdot \vec{IC}$



4)



Soit ABCD un carré calculer θ en fonction de x

Exposé 34 : Démos :

Thm Cauchy Schwartz :

[$\|\lambda\vec{u}+\vec{v}\|^2 \geq 0$ (propriété déjà vu).

$$\|\lambda\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \underbrace{\lambda^2\|\vec{u}\|^2 + 2\lambda\,\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2}_{\text{trinôme} \geq 0 \ \forall\lambda \text{ donc } \Delta\leq 0} \geq 0$$

or $\Delta = 4|\vec{u}.\vec{v}|^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$

$\Delta = 4(|\vec{u}.\vec{v}|^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2)$

$\Delta < 0 \Rightarrow 4|\vec{u}.\vec{v}|^2 - 4\|u\|^2\|\vec{v}\|^2 \leq 0$

ie $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

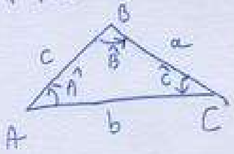
Cas d'égalité : si $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ $\vec{u} = k\vec{v}$ .... égalité

Réciproquement si on a $|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ ie $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \pm 1$ ie $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$.

Rq : Cauchy Schwartz peut se montrer facilement avec autre def du produit scalaire ie $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$]

Applications :

Al Kashi : Mq $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$



[(En regardant la formule on constate que $bc\cos\hat{A} = \|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|\cos\hat{A}$)

$$\vec{AC}.\vec{AB} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AC}-\vec{AB}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - \|\vec{BC}\|^2\right) = \frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$$

or $\vec{AC}.\vec{AB} = \|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\| \times \cos(\vec{AC},\vec{AB}) = bc\times\cos\hat{A}$

On a donc $\boxed{2bc\cos\hat{A} = b^2+c^2-a^2}$

Calcul de distance :

Soit $H = \text{proj}_{\perp}^{D}(M_0)$

Soit $\vec{n}\binom{a}{b}$ est un vecteur normal à D

$\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{M_0H}$ car $(M_0H)\perp D$

$|\vec{M_0H}.\vec{n}| = \|\vec{M_0H}\|\|\vec{n}\| \times |\cos(\vec{M_0H},\vec{n})|$ or $\vec{n}$ colinéaire à $\vec{M_0H}$ ie $(\vec{M_0H},\vec{n}) = \pi\ [\pi]$

ie $\cos(\vec{M_0H},\vec{n}) = \pm 1$

donc $\dfrac{|\vec{M_0H}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \|\vec{M_0H}\| = d(M_0,D)$

def de la distance d'un pt à une droite

~~[illegible]~~ $H\binom{x}{y}$. $\vec{M_0H} = \binom{x-x_0}{y-y_0}$ donc (d'après I) $|\vec{M_0H}.\vec{n}| = |a(x-x_0)+b(y-y_0)|$

$= |ax+by - ax_0 - by_0|$

or $H\in D$ ie $ax+by+c=0$

$= |-ax_0-by_0-c| = |ax_0+by_0+c|$

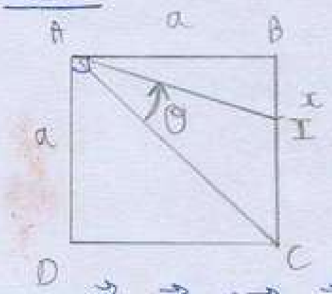
de plus $\|\vec{m}\| = \sqrt{a^2+b^2}$

Construction de $\sqrt{x}$

AIC rectangle en I car AIC inscrit dans $\mathcal{C}$ de diamètre [AC]

$$\vec{IA}.\vec{IC} = 0 \iff (\vec{IB}+\vec{BA})(\vec{IB}+\vec{BC}) = 0$$
$$\iff IB^2 + \underbrace{\vec{IB}.\vec{BC}}_{0} + \underbrace{\vec{BA}.\vec{IB}}_{0} + \vec{BA}.\vec{BC} = 0$$
$$\iff IB^2 = -\vec{BA}.\vec{BC}$$
$$\iff IB^2 = \vec{AB}.\vec{BC} = \|\vec{AB}\|\|\vec{BC}\|\underbrace{\cos(\vec{AB},\vec{BC})}_{1}$$
$$\iff IB^2 = 1 \times x$$
i.e $\boxed{IB = \sqrt{x}}$

Exo 4 : calculer $\cos\theta$:



On a $\vec{AC}.\vec{AI} = \|\vec{AC}\|.\|\vec{AI}\| \cos(\vec{AC},\vec{AI})$
$$= \underbrace{\|\vec{AC}\|}_{>0}.\underbrace{\|\vec{AI}\|}_{>0} \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{AC}.\vec{AI}}{\|\vec{AC}\|\,\|\vec{AI}\|}$$

de plus $\|\vec{AC}\| \overset{\text{pythagore}}{=} \sqrt{2}a$

$\|\vec{AI}\| = \sqrt{a^2+x^2}$

$$\vec{AC}.\vec{AI} = (\vec{AB}+\vec{BC})(\vec{AB}+\vec{BI}) = AB^2 + \underbrace{\vec{AB}.\vec{BI}}_{0} + \underbrace{\vec{BC}.\vec{AB}}_{0} + \vec{BC}.\vec{BI}$$
$$= a^2 + \|\vec{BC}\|.\|\vec{BI}\| \underbrace{\cos(\vec{BC},\vec{BI})}_{1}$$
$$= a^2 + ax = a(a+x)$$

Donc $\cos\theta = \dfrac{\cancel{a}(a+x)}{\sqrt{2}\cancel{a}\sqrt{a^2+x^2}}$ $\boxed{= \dfrac{a+x}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+x^2}}}$ avec $0 < x < a$