1 figure au poly III
+ les exos

Exposé 33

Exposé 33

Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances, d'angles, optimisation).

0- Pré-Requis :

- Barycentres
- angles orientés de vecteurs
- Thalès et pythagore
- Produit scalaire.
- Orthogonalité de deux droites

<u>En particulier</u> : soit $D \subset \mathcal{P}$, soit $M \in \mathcal{P}$, il existe une unique droite passant par M et orthogonale à D.

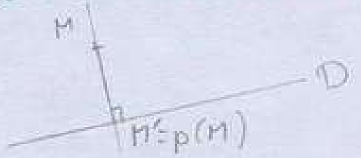
On se place dans $\mathcal{P}$ plan affine euclidien orienté, $\vec{\mathcal{P}}$ plan vectoriel associé.

I Projection orthogonale sur une droite du plan :

1) Definition :

<u>Def</u> : Soit D une droite du plan. On appelle projection orthogonale sur D l'application $p : \begin{matrix} \mathcal{P} \to \mathcal{P} \\ M \to M' \end{matrix}$, où M' est le point d'intersection de D avec la droite orthogonale à D passant par M.

M' est le projeté orthogonal de M sur D.



On note $M' = proj_{\perp D}(M)$

2) Propriétés

<u>Prop</u> : i) D est l'ensemble des points fixes de p

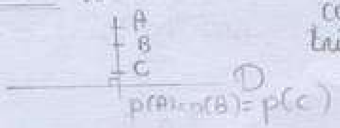
ii) $p \circ p = p$

iii) $M \in \mathcal{P}$, $p^{-1}(M) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } M \notin D \\ \text{droite perpendiculaire à } D \text{ passant par } M \text{ sinon.} \end{cases}$

<u>Rq</u> : Avec iii) on peut en déduire que p non injective et non surjective.

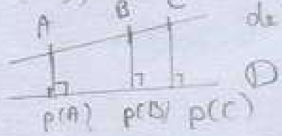
<u>Prop</u> : Soit $k \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathcal{P}$ tq $\vec{AC} = k\vec{AB}$ alors $\overrightarrow{p(A)p(C)} = k\,\overrightarrow{p(A)p(B)}$

[<u>1er cas</u> si $(AB) \perp D$



cas trivial

<u>2ème cas</u> $(AB) \not\perp D$



On a une config de Thalès. On a des rapports de longueur de plus $p(A), p(B), p(C)$ alignés]

<u>Corollaire</u> : p conserve les barycentres ie $G = Bar\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}\}$ alors $p(G) = Bar\{(p(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}\}$

<u>II Cas n=2</u> : $G = Bar\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2)\}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ $\iff \forall M \in \mathcal{P}$ $(\alpha_1 + \alpha_2)\vec{MG} = \alpha_1 \vec{MA_1} + \alpha_2 \vec{MA_2}$

$\iff M = A_1$ $(\alpha_1 + \alpha_2)\vec{A_1G} = \alpha_2 \vec{A_1A_2}$

$\iff \vec{A_1G} = \frac{\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)} \vec{A_1A_2}$

or en utilisant la prop précédente on a : $\overrightarrow{p(A_1)p(G)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\overrightarrow{p(A_1)p(A_2)}$

$\Leftrightarrow \underset{\Uparrow}{\ldots} \Leftrightarrow p(G) = \mathrm{Bar}\{(p(A_1),\alpha_1),(p(A_2),\alpha_2)\}$

Même raisonnement qu'au début à "l'envers"

Pour n quelconque on généralise avec l'associativité du barycentre. ∎

Corollaire : p est affine. provient de la conservation du barycentre.

Conséquences image(Droite) = Droite ...

II Projection vectorielle associée à p.

Déf-Thm : p étant la projection orthogonale sur D, l'application

$$\Pi : \vec{P} \to \vec{P}, \quad \overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{p(A)p(B)}$$

est appelée projection vectorielle associée à p.

Π est bien définie, linéaire et $\Pi \circ \Pi = \Pi$.

D * Π est bien définie car l'image de $\overrightarrow{AB}$ ne dépend que du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et non du choix des pts A et B.

En effet si on prend $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ avec $A \neq C$ et $B \neq D$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D$ car (ABDC) ▱ les diagonales se coupent en leurs milieux

$\Updownarrow$ corollaire I

$\overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{p(C)p(D)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}p(A) + \frac{1}{2}p(B) = \frac{1}{2}p(C) + \frac{1}{2}p(D)$

* Mq $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{P}$, i) $\Pi(\vec{u}+\vec{v}) = \Pi(\vec{u}) + \Pi(\vec{v})$
ii) $\Pi(\lambda\vec{u}) = \lambda\Pi(\vec{u})$

i) On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\exists C \in P$ tq $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

$\Pi(\vec{u}+\vec{v}) = \Pi(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \Pi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{p(A)p(C)} = \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{p(B)p(C)} = \Pi(\overrightarrow{AB}) + \Pi(\overrightarrow{BC}) = \Pi(\vec{u}) + \Pi(\vec{v})$

ii) on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\lambda\vec{u}$ colinéaire à $\vec{u}$ ie $\exists C \in P$ tq $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$

$\underset{\text{prop I}}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{p(A)p(C)} = \lambda\overrightarrow{p(A)p(B)}$

$\Pi(\overrightarrow{AC}) = \lambda\Pi(\overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \Pi(\lambda\vec{u}) = \lambda\Pi(\vec{u})$

Donc Π linéaire

* $\Pi \circ \Pi = \Pi$ provient de $p \circ p = p$ ∎

Prop : $\mathrm{Ker}\,\Pi = \vec{D}^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\,\Pi = \vec{D}$

Prop : Soit D une droite du plan. Tout vecteur $\vec{u} \in \vec{P}$ se décompose de manière unique $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$ où $\begin{cases} \vec{u_1} \in \vec{D} \\ \vec{u_2} \in \vec{D}^{\perp} \end{cases}$

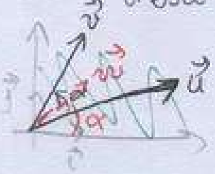
D Existence en posant $\vec{u_1} = \Pi(\vec{u})$, $\vec{u_2} = \vec{u} - \Pi(\vec{u})$ et en utilisant la prop précédente

Unicité par l'absurde ∎

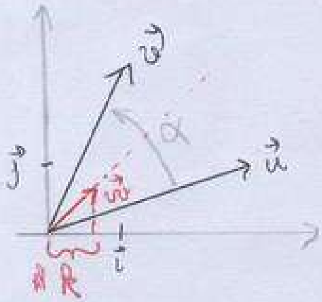
III Applications :

1) Cosinus d'un angle de deux vecteurs

<u>Prop</u> : i) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls, il existe un unique vecteur $\vec{w}$ unitaire tq $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{w})\ [2\pi]$



ii) Si p est la proj orthogonale sur (Ox) et π sa proj vectorielle associée, il existe un unique $k \in \mathbb{R}$ tq $\pi(\vec{w}) = k\vec{i}$



<u>Def</u> : Le nombre k définit ci-dessus ne dépend que de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est appelé cosinus de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$

<u>Prop</u> : Soit D une demi-droite d'origine O, $\alpha = ([Ox), D)$ $\forall M \in D$ et $H = proj_{\perp (Ox)}(M)$
on a $\overline{OH} = \cos \alpha\, \overline{OM}$

2) Distance :

<u>Prop</u> : $M \in \mathcal{P}$. D une droite $H = proj_{\perp}(D)(M)$
$\forall P \in D$, $P \neq H$ on a $MH < MP$

<u>Def</u> : On définit la distance du point M à la droite D comme étant $d(M, D) = \inf\limits_{P \in D} d(M, P) = \min\limits_{P \in D} d(M, P) = MH$ où $H = proj_{\perp(D)}(M)$

<u>Exercice 1</u> :
Déterminer la distance d'un cercle à une droite.

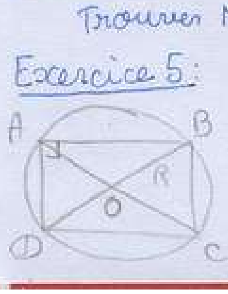
<u>Exercice 2</u> :
Calculer $d(M, D)$ où $D : ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$
$M(x_0, y_0)$

3) Optimisation :

<u>Exercice 3</u> : Soit $A, B \in \mathcal{P}$ tq $A \neq B$, D droite du plan
Trouver $M \in D$ tq $MA^2 + MB^2$ soit minimale.

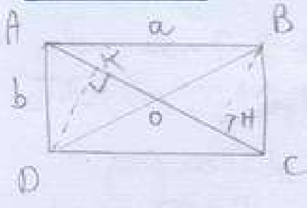
<u>Exercice 4</u> : Soit $A, B, C \in \mathcal{P}$ tq ABC soit un triangle non aplati. D droite du plan
Trouver $M \in D$ tq $MA^2 + MB^2 + MC^2$ soit minimal.

<u>Exercice 5</u> :



ABCD rectangle inscrit dans cercle centre O rayon R.
Mq l'aire ABCD est maximale lorsque ABCD est un carré

Exercice 6 :



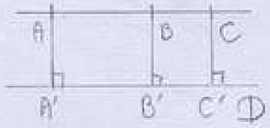
En évaluant de deux façon $\vec{CA} \cdot \vec{BD}$

Mq $HK = \frac{|a^2 - b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exposé 33 : Démo

Prop : Soit $k \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathcal{P}$ tq $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{p(A)p(C)} = k\,\overrightarrow{p(A)p(B)}$ p proj $\perp D$

[1er cas : D et la droite contenant A, B, C sont parallèles.



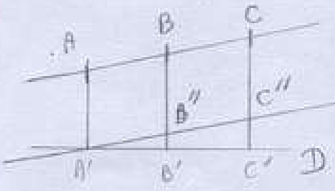
On a donc $(AB) \parallel D$ et $\underbrace{(AA') \perp D \text{ et } (BB') \perp D \text{ et } (CC') \perp D}_{\text{Donc } (AA') \parallel (BB') \parallel (CC')}$

et $(AC) \parallel D$

De plus $(AA') \perp D$, $(BB') \perp D$ et $(CC') \perp D$ donc $(ABB'A')$ et des et $(ACC'A')$ rect

ie $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'}$

2ème cas : $(AB) \not\parallel D$



On trace la parallèle à (AB) passant par A'.

On retrouve des parallélogrammes.

Ainsi on se ramène à une **configuration** de Thalès.

ie. $\dfrac{\overline{A'B''}}{\overline{A'C''}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ $\Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$

$\quad \| \quad$ puisque A', B', C' alignés.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

]

Conséquences :

[Conservation du Barycentre : **Soit** p proj $\perp (D)$ et Π sa proj vect associée.

Soit $G = \text{Bar}\{(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le m}\}$ ie $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$

$\underset{G'}{\overset{\|}{p(G)}} \overset{?}{=} \text{Bar}\{(p(A_i), \alpha_i)_{1 \le i \le m}\}$

On a Π qui est linéaire ie $\underset{\Pi(\vec{0}) = \vec{0}}{\underset{\|}{\Pi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right)}} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Pi(\overrightarrow{GA_i}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{p(G)p(A_i)}$

$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i'}$

ie $G' = \text{Bar}\{(A_i', \alpha_i)_{1 \le i \le m}\}$

]

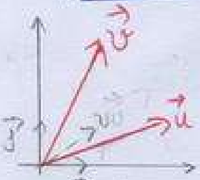
[l'image d'une droite par p est une droite

Soit (AB) une droite, la droite AB est l'ensemble des barycentres de A et B.

donc l'image d'une droite est une droite par la démo précédente]

III Applications :

1) Cosinus d'un angle de deux vecteurs :



Prop : $\exists!\, \vec{w}$ unitaire tq $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{w})\ [2\pi]$

[Prop 1) : Prenons un vecteur $\vec{w}$ tq $(\vec{i}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$

Unicité : Soit $\vec{w}, \vec{w}'$ unitaires tq :

$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{w}) = (\vec{i}, \vec{w}')\ [2\pi]$

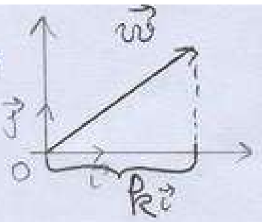
$\Leftrightarrow (\vec{i}, \vec{w}) - (\vec{i}, \vec{w}') = 0\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\vec{w}', \vec{w}) = 0\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \vec{w}$ et $\vec{w}'$ colinéaires de $\hat{m}$ sens

$\Rightarrow \vec{w} = \vec{w}'$

[Prop ii)



Existence :

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ avec $\vec{v}'$ "//" $\vec{i}$

$\vec{v}''$ "//" $\vec{j}$

$\vec{p}(\vec{v}) = \vec{v}'$

existence vient de la proposition du I.

donc $\vec{p}(\vec{v})$ "//" à $\vec{i}$ donc $\exists k$ tq $\vec{v}' = k\vec{i}$ ie $\vec{p}(\vec{v}) = k\vec{i}$

~~Unicité : k et k' tq $p(\vec{v}) = k\vec{i} = k'\vec{i} = \vec{v}'$~~

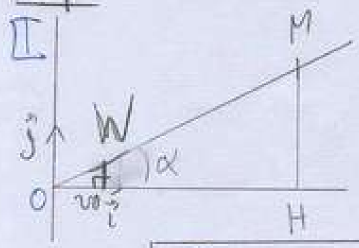
~~$(k\vec{i} - k'\vec{i}) = \vec{0} \iff (k-k')\vec{i} = \vec{0}$ ie $k = k'$~~

Rq vient du fait qu'il y a unicité de la décomposition $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ (d'après II)

Donc le $\vec{v}'$ est unique et le k est unique.]

Prop :

[



Si on prend $W \in (OM)$ tq $\|OW\| = 1$

On note $v = p_\perp(Ox)(W)$

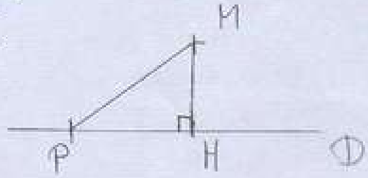
On a par Thalès : $\dfrac{\overline{Ov}}{\underset{1=}{\overline{OW}}} = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{OM}}$

$\Rightarrow \boxed{\overline{OH} = \cos\alpha \, \overline{OM}}$ car $\overline{Ov} = \cos\alpha$]

Distance :

Prop : $M \in \mathcal{P}$. D une droite. $H = proj_\perp(D)(M)$ $\forall P \in D$ $P \neq H$ on a $MH < MP$

[



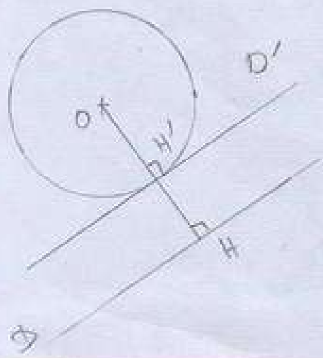
soit $P \in D$

PMH tr rect donc pythagore :

$MP^2 = MH^2 + PH^2$ ie $MP^2 > MH^2$

$MP > MH$]

Excercice 1 :



. Si $\mathcal{C}(O,R) \cap D \neq \emptyset$

$d(\mathcal{C}, D) = 0$

. Si $\mathcal{C}(O,R) \cap D = \emptyset$ alors

Soit $H = proj_\perp(D)(O)$

$H' = (OH) \cap \mathcal{C}$

Soit D' // D passant par H'

D' est tangente à $\mathcal{C}$ au point H' évident.

D // D' donc $d(D, D') = d(H', D) = HH'$ (on peut le mq avec pythagore)

donc $d(\mathcal{C}, D) = HH'$ car $(d(D', \mathcal{C}) = 0)$

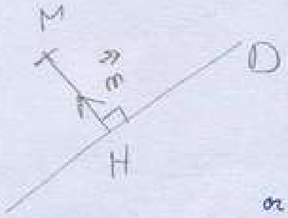
Exercice 2 :

Calculer la distance $d(D, M)$ où $D : ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$
$M(x_0, y_0)$

Mq $d(M,D) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

[$D : ax + by + c = 0$

On sait que $\vec{n}(a,b)$ est un vecteur normal à D



On $d(M,D) = MH = \dfrac{|\vec{MH} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|a(x_0 - x_H) + b(y_0 - y_H)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

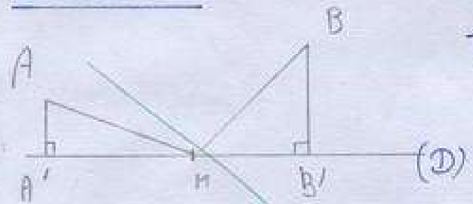
où $H = proj_{\perp D}(M)$

$= \dfrac{|ax_0 + by_0 - ax_H - by_H|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

or $H \in D$ ie $ax_H + by_H + c = 0$
$\Leftrightarrow ax_H + by_H = -c$

$$\boxed{d(M,D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$]

Exercice 3 :

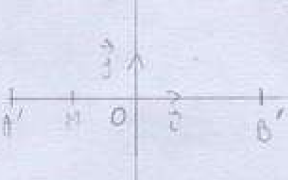


Trouver M sur D tq $MA^2 + MB^2$ soit minimale.

[Soit $A' = proj_{\perp D}(A)$ et $B' = proj_{\perp D}(B)$

$\begin{cases} MA^2 = AA'^2 + A'M^2 \\ MB^2 = BB'^2 + B'M^2 \end{cases}$ Pythagore donc $MA^2 + MB^2 = \underbrace{AA'^2 + BB'^2}_{\text{constant}} + A'M^2 + B'M^2$

Minimiser $MA^2 + MB^2$ revient à minimiser $MA'^2 + MB'^2$



Soit O le milieu de $[A'B']$, on considère le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$A'\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ $B'\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

$MA' = \|\vec{MA'}\| = x_{A'} - x_M = -a - x$

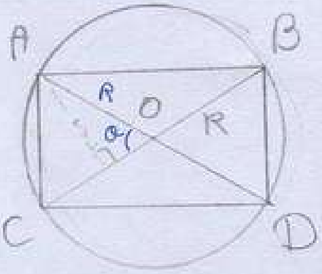
$MB' = \|\vec{MB'}\| = x_{B'} - x_M = a - x$

donc $MA'^2 + MB'^2 = (a+x)^2 + (a-x)^2 = 2(a^2 + x^2)$

Donc $MA'^2 + MB'^2$ est minimum si $x = 0$ ie M milieu de $[A'B']$]

Résolu de manière plus simple après

Exercice 5 :



Mq $\mathcal{A}$ ABCD est maximale quand ABCD est un carré.

[Considérons le point H, projeté orthogonal de A sur (BD)

$$\mathcal{A}_{ABCD} = AH \times 2R$$

et $AH = R \sin \theta$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \times R^2 \sin \theta$$

Donc l'aire est maximale si $\sin\theta = 1$ ie $\theta = \frac{\pi}{2}$

ie ABCD est un carré.]

Rq : Sur la démo conservation du barycentre.

$\text{Bar}\{(M_1, \alpha_1), \dots, (M_{n-1}, \alpha_{n-1}), (M_n, \alpha_n)\}$

$\text{Bar} = \{(H, (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1})), (M_n, \alpha_n)\}$

il faut comme hypothèse $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$

Quitte à ordonner les termes $M_1, \dots, M_n$, on peut le faire de manière à ce que la somme soit non nul. Rq, il existe forcément $(n-1)$ couple dont la somme des coeffs est non nul sinon tous les coeffs (ie les n) seraient nuls.

Prop : $\operatorname{Ker} \pi = \vec{D}^{\perp}$ et $\operatorname{Im} \pi = \vec{D}$

[* $\operatorname{Im} \pi = \vec{D}$ évident def de π et p.

* Soit $\vec{u} \in \vec{D}^{\perp}$ soit $A, B \in \mathcal{P}$ tq $\vec{u} = \vec{AB}$ on a donc $(AB) \perp D$

ie $p(A) = p(B)$

$\pi(\vec{u}) = \pi(\vec{AB}) = \overrightarrow{p(A)p(B)} = \vec{0}$ Donc $\underline{\vec{u} \in \operatorname{Ker}\pi}$ ie $\vec{D}^{\perp} \subset \operatorname{Ker}\pi$

Soit $\vec{u} \in \operatorname{Ker}\pi$ ie $\pi(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \pi(\vec{AB}) = \overrightarrow{p(A)p(B)} = \vec{0}$

Soit $A, B \in \mathcal{P}$ tq $\vec{u} = \vec{AB}$

ie $p(A) = p(B)$

ie $(AB) \perp D$

ie $\vec{u} = \vec{AB} \in \vec{D}^{\perp}$]

⚠ Question piège π est elle diagonalisable (sa matrice)

Réponse oui

car $\pi \circ \pi = \pi$ ie $P(X) = X^2 - X = X(X-1)$ est un poly annulateur de π

donc polynôme minimal de π divise P et a donc forcément ces racines qui sont simples et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ie il est scindé ds $\mathbb{R}$)

$\Longrightarrow$ Diagonalisable.

Prop : Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Tout vecteur $\vec{u} \in \vec{P}$ se décompose de manière unique $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$ où $\begin{cases} \vec{u_1} \in \vec{\mathcal{D}} \\ \vec{u_2} \in \vec{\mathcal{D}}^\perp \end{cases}$

[Existence : On considère p proj orthogonale sur $\mathcal{D}$
π proj vectorielle associée.

On pose $\vec{u_1} = \pi(\vec{u})$ et $\vec{u_2} = \vec{u} - \pi(\vec{u})$ on a bien $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$

* $\underline{\vec{u_1} \in \vec{\mathcal{D}}}$
car $\mathrm{Im}\,\pi = \vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{u_1} = \pi(\vec{u}) \in \vec{\mathcal{D}}$

* $\vec{u_2} = \vec{u} - \pi(\vec{u})$ π linéaire

$\pi(\vec{u_2}) = \pi(\vec{u}) - \pi\circ\pi(\vec{u})$
$\pi(\vec{u_2}) = \pi(\vec{u}) - \pi(\vec{u}) = \vec{0}$ car $\pi\circ\pi = \pi$

ie $\underline{\vec{u_2} \in \vec{\mathcal{D}}^\perp}$ car $\mathrm{Ker}\,\pi = \vec{\mathcal{D}}^\perp$

Unicité : par l'absurde ie 2 décomposition différente.

Soit $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$ $\quad \vec{u_1} \in \vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{u_2} \in \vec{\mathcal{D}}^\perp$
$= \vec{u_1}' + \vec{u_2}'$ $\quad \vec{u_1}' \in \vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{u_2}' \in \vec{\mathcal{D}}^\perp$

$\pi(\vec{u_1} + \vec{u_2}) = \pi(\vec{u_1}) + \underbrace{\pi(\vec{u_2})}_{\vec{0}}$ car $\mathrm{Ker}\,\pi = \vec{\mathcal{D}}^\perp$

$\pi(\vec{u_1}' + \vec{u_2}') = \pi(\vec{u_1}') + \underbrace{\pi(\vec{u_2}')}_{\vec{0}}$ $\Rightarrow \underbrace{\pi(\vec{u_1})}_{= \vec{u_1}} = \underbrace{\pi(\vec{u_1}')}_{= \vec{u_1}'}$ car $\vec{u_1}, \vec{u_1}' \in \vec{\mathcal{D}}$

donc $\underline{\vec{u_1} = \vec{u_1}'}$

$\vec{u_2} = \vec{u} - \vec{u_1} = \vec{u} - \vec{u_1}' = \vec{u_2}'$
$\Rightarrow \vec{u_2} = \vec{u_2}'$]

Exercice 3 :

$M = p_{\perp(\mathcal{D})}(I)$

$A, B \in \mathcal{P}$ $\quad M \in \mathcal{D}$
$MA^2 + MB^2$ minimale.

Soit I = milieu $[AB]$
ie $I = \mathrm{Bar}\{(A,1)(B,1)\}$

$MA^2 + MB^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2$
$= MI^2 + \underbrace{IA^2 + IB^2}_{= \text{cte}} + 2\vec{MI}(\underbrace{\vec{IA} + \vec{IB}}_{= \vec{0}})$

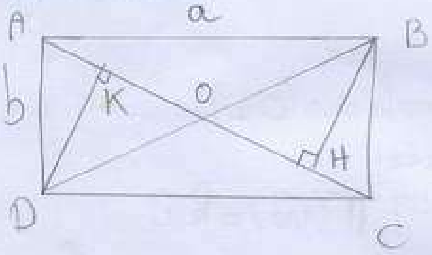
Donc minimiser $MA^2 + MB^2$
revient à minimiser MI^2 ie $M = \mathrm{proj}_{\perp \mathcal{D}}(I)$.

Exercice 4 :

ABCD un rectangle inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.

Mq : l'aire de ABCD est maximale quand c'est un carré.

Exercice 5 :



En évaluant de 2 façon $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$, Mq

$$HK = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[$\overrightarrow{HK}$ étant le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BD}$ sur (AC), on a :

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{HK}$. Ainsi $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{HK}$

$= \sqrt{a^2+b^2} \times HK$

D'autre part $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}$

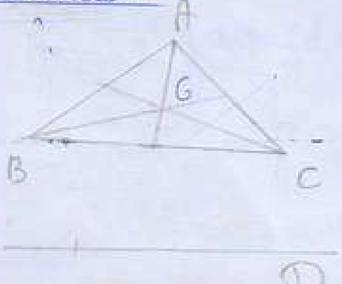
En considérant les projetés orthogonaux de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BA}$ sur (AD)

il vient $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA} = BA^2 = a^2$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AD} = -b^2$

d'où $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = a^2 - b^2$.

On conclut $\sqrt{a^2+b^2} \times HK = a^2 - b^2$]

Exercice 4 :



On considère $G = \text{Bar}\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$

et $p = \text{proj}_\perp$ ~~D~~

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$$

$$= (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}\underbrace{\left[\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right]}_{0 \text{ car } G = \text{Ba}}$$

$$= 3MG^2 + \underbrace{GA^2 + GB^2 + GC^2}_{\text{cte}}$$

et MG est minimal avec $M \in D$ si $M = \text{proj}_{\perp(D)}(G)$ d'après la prop sur les distances.