Rq: Sur le transparent tracer les différentes figures des parties.

Exposé 31 :

Droites remarquables du triangle : bissectrices, hauteurs médianes, médiatrices ...

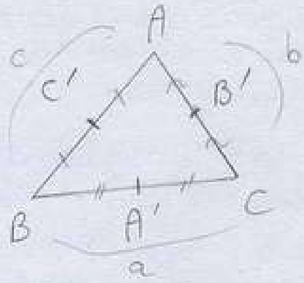
Autre possibilité
Dessin sur
- Voyage 200
CABRI

0 - Pré-Requis :

- Barycentres (coordonnées barycentriques)
- Réflexions et homothéties.

Cadre : P plan affine euclidien.

Dans tout l'exposé on considère un triangle ABC non aplati :



I Médiatrices :

Def : La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment. C'est aussi la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu.

Thm : Les médiatrices d'un triangle se coupent en un point O centre du cercle circonscrit à ABC.

Dessin sur poly.

I Notons $\Delta_A = \text{méd } [BC]$

$\Delta_B = \text{méd } [AC]$

$\Delta_C = \text{méd } [AB]$

Δ_A et Δ_B sont sécantes en un point O.

(Sinon Δ_A et Δ_B seraient parallèles et donc $(BC) // (AC)$ (car $\Delta_A \perp (BC)$, $\Delta_B \perp (AC)$) et donc A, B, C serait alignés contradictoire car ABC non aplati)

On a $\left.\begin{array}{l} OB = OC \\ OC = OA \end{array}\right\} \Rightarrow OC = OA$ et $O \in \Delta_C$ $\Rightarrow \underline{\Delta_A \cap \Delta_B \cap \Delta_C = \{O\}}$]

II Médianes :

dessin sur poly.

Def : On appelle médiane d'un triangle toute droite passant par un sommet et le milieu du coté opposé.

Thm : Les médianes de ABC sont concourantes en un point G isobarycentre du système ~~(A,1),(B,1),(C,1)~~ $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$ (ie $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$). G est situé au $\frac{2}{3}$ de chacune d'elle.

I $G = \text{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$

$G = \text{Bar}\{(A,1),(A',2)\}$ par associativité du barycentre.

Donc $G \in (AA')$

On fait de même $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$ donc $G = (AA') \cap (BB') \cap (CC')$

De plus avec la relation $G = \text{Bar}\{(A,1),(A',2)\}$ on obtient $\vec{GA} + 2\vec{GA'} = \vec{0}$ Chasles

$\vec{GA} + 2\vec{GA} + 2\vec{AA'} = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}}$$

Même chose $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BB'}$ et $\vec{CG} = \frac{2}{3}\vec{CC'}$]

III Hauteurs : Dessin sur poly.

Def : On appelle hauteur du triangle toute droite passant par un sommet et perpendiculaire au coté opposé.

Thm : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle. De plus on a O, G, H alignés sur droite appelée droite d'Euler. On a $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ (relation d'Euler)

[* On suppose que G est l'isobarycentre de ABC (ie ∩ médianes vu au dessus). On a donc les relations : $\vec{GA} = -2\vec{GA'}$, $\vec{GB} = -2\vec{GB'}$ et $\vec{GC} = -2\vec{GC'}$

* On considère $h_{G,-2}$. h transforme le triangle $A'B'C'$ en ABC (En effet $h(A') = A$, $h(B') = B$ ... et une homothétie transforme un triangle en un triangle).

* Et h transforme les médiatrice de ABC en hauteurs.

En effet : soit Δ_A médiatrice [BC]

$h(\Delta_A)$ est une droite // à Δ_A (prop des homothéties). car $A' \in \Delta_A$

Donc $h(\Delta_A)$ est une droite $\perp$ à (BC) et elle passe par $h(A') = A$

=> Donc $h(\Delta_A)$ est la hauteur issue de A.

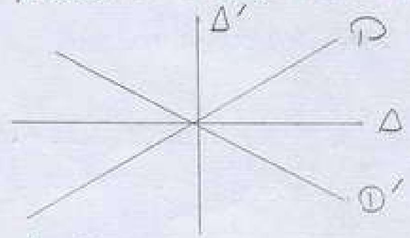
* Comme les trois médiatrices sont concourantes en O et comme h est bijective, on en déduit l'existence de l'orthocentre H.

On a $h(O) = H$ ce qui donne $\vec{GH} = -2\vec{GO}$ ou encore $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ ...]

IV Bissectrices :

Def : Les bissectrices d'un couple de droite (D, D') sont les axes des deux seules reflexions échangeant D et D'.

Autrement dit Δ est la bissectrice de (D, D') ssi $s_\Delta(D) = D'$



Dessin sur poly.

Def : La bissectrice intérieur (resp ext.) issue de A du triangle ABC, est l'axe de l'unique reflexion échangeant les 1/2 droites [AB) et [AC) (resp [AB) et [AC') où $\vec{AC'} = -\vec{AC}$) car la notation −[AC) est abusive.

Thm : Les bissectrices intérieures de ABC se coupent en un point I, centre du cercle inscrit au triangle. Les coordonnées barycentriques de I sont (a, b, c) dans le repère affine (A, B, C) (i

Rq, $a>0, b>0, c>0$ car longueurs ... donc I est à l'intérieur du triangle.

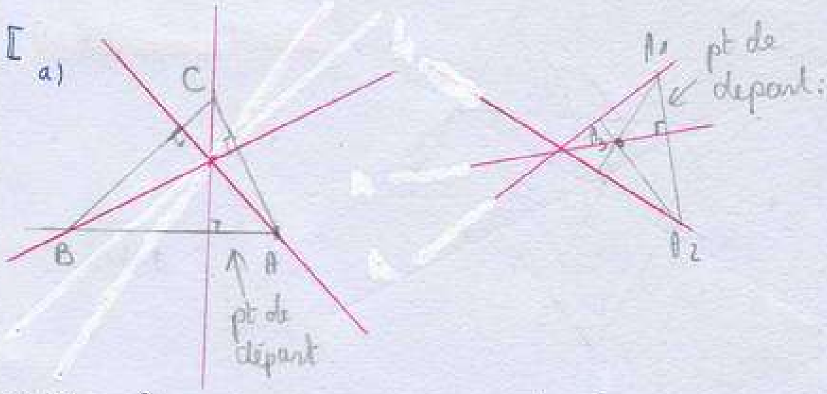
V Applications.

1) Etant donné 3 droites concourantes, construire ABC tq ces droites soient a) les hauteurs de ABC

b) les médiatrices de ABC

c) les médianes de ABC.

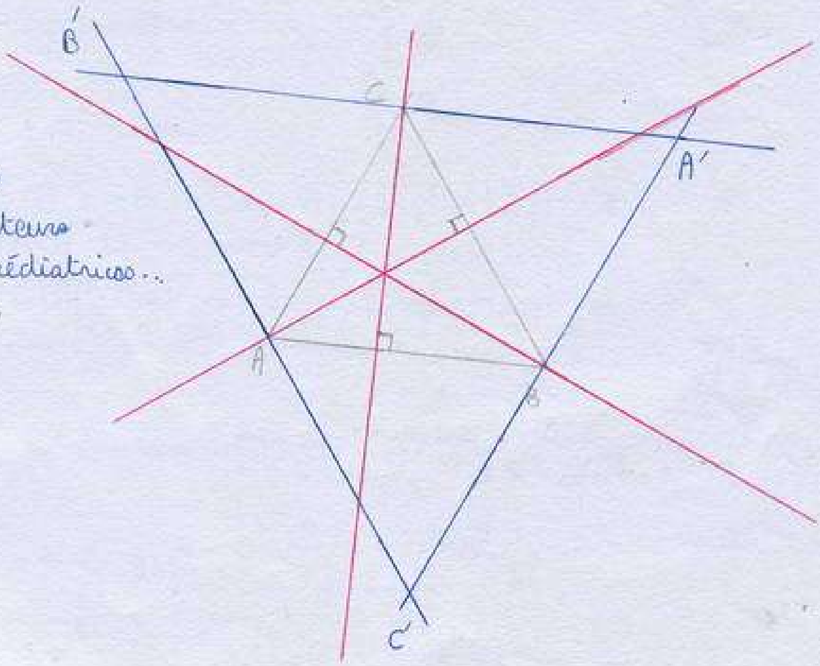
I a)



Pour les hauteurs, il suffit de prendre une des hauteurs de tracer un des cotés du triangle (celui qui est perpendiculaire à cette hauteur). On prolonge ce coté pour avoir l'intersection avec les 2 autres hauteurs...

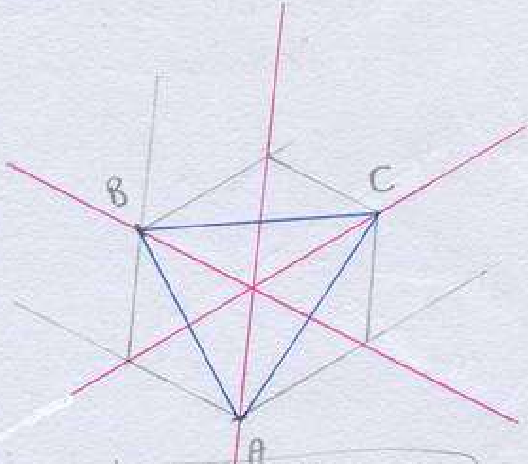
b) Pour les médiatrices On construit comme en a) le triangle correspondant aux hauteurs (triangle ABC). Ensuite on trace la parallèle à (BC) passant par A la parallèle à (AC) passant par B et la parallèle à (AB) passant par C. Les droites droites st sécantes en A', B', C' et A'B'C' est le triangle recherché (I On a tracé des parallélogrammes, d'où apparition des médiatrices II)

On a trois parallélogrammes (//) donc les hauteurs deviennent médiatrices...



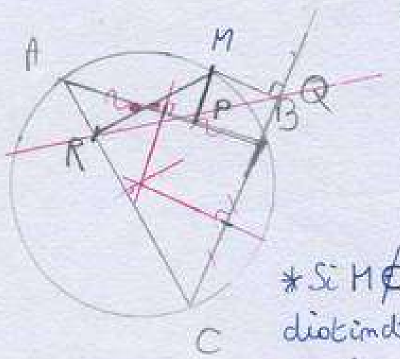
c) Les Médianes :

On place le point A sur l'une des droites on trace les 2 parallèles passant par A et parallèles aux deux autres médianes. On obtient un parallélogramme les diagonales se coupent en leurs milieux on obtient le point B.



9.) Droites de Simpon. DIFFICILE

Thm : Soient ABC un triangle et P, Q, R les projetés orthogonaux de M un point du plan sur (AB), (BC) et (CA). Les points P, Q, R sont alignés ssi M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.



[* Si $M \in \{A,B,C\}$ alors on a clairement l'équivalence. En effet $M \in \{A,B,C\} \subset \mathcal{C}_{ABC}$ et P, Q, R sont alignés car deux de ces points sont confondus.

(Exemple : si $M=A$ $P=A$ $Q \in (BC)$ et $R=A$ donc $P=R$ et donc P, R, Q alignés)

* Si $M \notin \{A,B,C\}$, alors les points P, Q, R sont 2 à 2 distincts car si $P=Q$ alors $P=Q=B$ et la droite (MB) serait perpendiculaire à la fois à [AB] et (BC) or ces deux droites ont sécantes - Absurde ! On a par cocyclicité.

calcul sur les angles $\alpha+\beta+\gamma=180$ angles alternes...

On a $(\vec{RP},\vec{RQ}) = (\vec{RP},\vec{RM}) + (\vec{RM},\vec{RQ}) = (\vec{AP},\vec{AM}) + (\vec{CM},\vec{CQ})\ [\pi]$

d'où P, Q, R alignés $\iff (\vec{RP},\vec{RQ}) = 0\ [\pi]$

$\iff (\vec{AP},\vec{AM}) = (\vec{CQ},\vec{CM})\ [\pi]$

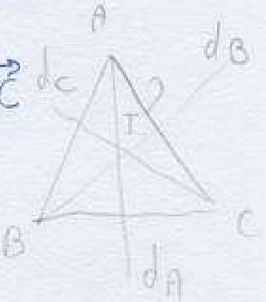
$\iff (\vec{AB},\vec{AM}) = (\vec{CB},\vec{CM})\ [\pi]$

$\iff M \in \mathcal{C}_{ABC}$]

Thm : Les bissectrices intérieures de ABC st concourantes en I, centre du cercle ~~circonscrit~~ inscrit au triangle, et de plus $I = (a, b, c)$ dans le repère affine (A, B, C)

[Soit $I = \text{Bar}\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ et on nomme d_A, d_B, d_C les bissectrices intérieures issues de A, B, C de ABC

Montrons que I appartient à chacune des bissectrices intérieures :



$\forall P \in \mathcal{P}$ on a $(a+b+c)\vec{PI} = a\vec{PA} + b\vec{PB} + c\vec{PC}$

Si on prend $P = A$ on a $\vec{AI} = \frac{b}{a+b+c}\vec{AB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{AC}$

Définissons les points M et N tq :

$\vec{AM} = \frac{b}{a+b+c}\vec{AB}$ et $\vec{AN} = \frac{c}{a+b+c}\vec{AC}$

On a donc $\vec{AI} = \vec{AM} + \vec{AN}$

$\Rightarrow$ Le quadrilatère ANIM est un parallélogramme.

De plus $AM = \|\frac{b}{a+b+c}\vec{AB}\| = \frac{bc}{a+b+c}$ et $AN = \frac{cb}{a+b+c}$ donc $AM = AN$

Donc ANIM est un losange car 2 cotés consécutifs de m̂ longueur.

La droite (AI) est donc axe de symétrie du couple $([AB),[AC))$ soit par définition (AI) est la bissectrice intérieure en A du triangle.

M̂ chose pour (BI) et (CI)

De plus, deux bissectrices intérieures au triangle ne sont pas parallèles car sinon : si $d_A // d_B$ alors $\supset d_B \cap \supset d_A$