Exposé 30 :

Recherche des isométries du plan conservant un carré, un losange, un parallélogramme, un rectangle.

Cadre : $(P, \vec{P})$ plan affine euclidien orienté.

Rappel : parallélogramme $\Leftrightarrow$ quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

rectangle $\Leftrightarrow$ parallélogramme dont les diagos ont même longueur.

losange $\Leftrightarrow$ parallélogramme dont les diagos st perpendiculaires.

carré $\Leftrightarrow$ parallélogramme dont diago $\perp$ et de m̂ longueur.

La composé de 2 isométries = isométrie.

deplacement = isométrie qui conserve les angles orientés.

antideplacement o deplacement = antideplacement.

antideplacement o antideplacement = déplacement.

$\Gamma = \{A, B, C, D\}$ où ABCD est un parallélogramme de centre O.

$Is(\Gamma)$: ensemble des isométrie laissant Γ invariant

$Is^+(\Gamma)$: ——— positive laissant Γ invariant.

$Is^-(\Gamma)$: ——— négative ———

0 - Pré-Requis :

- def et propriété des isométries du plan.
- barycentre
- def et prop du parallélogramme, losange, rectangle et carré.

I Etude Préliminaire :

Prop : $\forall f \in Is(\Gamma)$, O est un point fixe de f.

[Si Γ est invariant par f alors évidemment $f(O) = O$]

Conséquence : $\forall f \in Is(\Gamma)$ f est soit une rotation de centre O, soit une reflexion d'axe passant par O. car $Is^+(P)$ = translation, rotation, Id

$Is^-(P)$ = symétries glissés (ie projection o translation

Prop :
- $(Is(\Gamma), \circ)$ est un groupe
- $(Is^+(\Gamma), \circ)$ est un sous groupe de $(Is(\Gamma), \circ)$
- Si $g \in Is^-(\Gamma)$ alors $Is^+(\Gamma) \circ g = Is^-(\Gamma)$

[2 premiers évident car deplacement o déplacement = deplacement.

- $\subset$ Soit $f \in Is^+(\Gamma) \Rightarrow f \circ g \in Is^-(P)$ car antiodep = anti
  dc $Is^+(\Gamma) \circ g \subset Is^-(\Gamma)$
- $\supset$ Soit $f \in Is^-(\Gamma)$ et $h = \underbrace{\underbrace{f}_{\text{anti}} \circ \underbrace{g^{-1}}_{\text{anti}}}_{\text{dep !!}}$ mq g^{-1} existe car $g \in Is^-(\Gamma) \subset \underbrace{Is(\Gamma)}_{\text{groupe}}$
  $\Rightarrow h \in Is^+(\Gamma)$. de plus $\underset{\text{anti}}{g} \circ g^{-1} = Id$ dep
  donc on en déduit $g^{-1} \in Is^-(\Gamma)$

Conséquence:

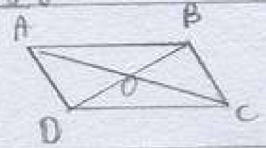
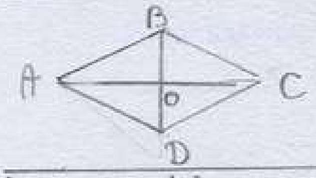
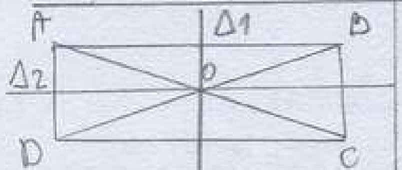
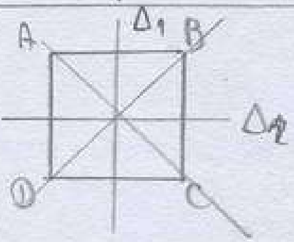
Si $card(I_O^-(\Gamma)) \neq 0$ alors $Card(I_O^+(\Gamma)) = Card(I_O^-(\Gamma))$

[car si $I_O^-(\Gamma) \neq \emptyset$ alors entre $I_O^+(\Gamma)$ et $I_O^-(\Gamma)$ il y a une bijection car les isométries sont des bijections.]

Prop: Soit $f \in I_O(\Gamma)$, l'isométrie f transforme la diagonale $[AC]$ en la diagonale $[AC]$ ou $[BD]$.

[O est le milieu de $[AC]$ donc comme une isométrie conserve les milieux O milieu de $[f(A), f(C)]$ et $f(A), f(C) \in \{A, B, C, D\}$ ie $[f(A)f(C)] = [AC]$ ou $[BD]$

Thm:

configuration Γ	$I_O^+(\Gamma)$	$I_O^-(\Gamma)$
	$\{Id_P, r(O,\pi)\}$	$\emptyset$
	$\{Id_P, r(O,\pi)\}$	$\{s_{(AC)}, s_{(BD)}\}$
	$\{Id_P, r(O,\pi)$	$\{s_{\Delta 1}, s_{\Delta 2}\}$
	$\{Id_P, r(O,\frac{\pi}{2}), r(O,\pi), r(O,\frac{3\pi}{2})$	$\{s_{\Delta 1}, s_{\Delta 2}, s_{(AC)}, s_{(BD)}\}$

II Parallélogramme (pas un losange, ni un rectangle).

Soit $f \in I_O(\Gamma)$, $f(\{A, C\}) = \{A, C\}$ ou $\{B, D\}$ (Voir au dessus).

si $f(\{A, C\}) = \{B, D\}$ alors $f([AC]) = [BD]$ or f conserve les distances. donc $AC = BD$ contraire à l'hypothèse Γ n'est pas un rectangle

$\Rightarrow$ $f(\{A, C\} = \{A, C\}$

1) $I_O^+(\Gamma)$

Soit $r \in I_O^+(\Gamma)$ alors $r(A) = A$ ou C.

si $r(A) = A$ alors $r = Id_P$

si $r(A) = C$ alors $r = r(O, \pi)$

ds ce cas $\boxed{I_O^+(\Gamma) = \{Id_P, r(O,\pi)\}}$

(On a vu ds I que $I_O(\Gamma)$ = rotation centre O ou reflexion d'axe passant par O)

dc $I_O^+(\Gamma) \subseteq \{$rotation de centre O$\}$

2) $I_O^-(\Gamma)$

Soit $s_\Delta \in I_O^-(\Gamma)$ on a $s_\Delta((AC)) = (AC)$ donc $s_\Delta((BD)) = (BD)$ (car $s_\Delta(\{A,B,C,D\}) = \{A,B,C,D\}$)

car on a vu au début du II que $\forall f \in I_O(\Gamma)$ $f((AC)) = (AC)$

On a donc :

- soit $(AC) = \Delta$ et $\Delta \perp (BD)$ faux car Γ pas losange
- soit $(BD) = \Delta$ et $\Delta \perp (AC)$ faux car Γ pas losange.

$\boxed{I_O^-(\Gamma) = \emptyset}$

(rq $I_O^-(\Gamma)$ est forcement composé de réflexion on prend $s_\Delta \in$ ...)

III Losange (Pas un carré).

On a tjs $\forall f \in I_O(\Gamma)$, $f((AC)) = (AC)$ ou (BD)

1) $I_O^-(\Gamma)$

Soit $s_\Delta \in I_O^-(\Gamma)$, s_Δ conserve les distances donc $OA = Os_\Delta(A)$

donc $s_\Delta(A) = A$ ou C

- si $s_\Delta(A) = A$ alors $\Delta = (AC)$
- si $s_\Delta(A) = C$ alors $\Delta = (BD)$ car $(BD) \perp (AC)$..

réciproquement on vérifie que $s_{(AC)} \in I_O^-(\Gamma)$ et $s_{(BD)} \in I_O^-(\Gamma)$

dc $\boxed{I_O^-(\Gamma) = \{s_{(AC)}, s_{(BD)}\}}$

2) $I_O^+(\Gamma)$

Un losange est un parallélogramme donc $\{Id_P, r(O,\pi)\} \subset I_O^+(\Gamma)$

card $(I_O^+(\Gamma)) = $ Card$(I_O^-(\Gamma)) = 2$ ie $\boxed{I_O^+(\Gamma) = \{Id_P, r(O,\pi)\}}$

IV Rectangle (pas un carré)

Γ est un rectangle et $f \in I_O(\Gamma)$, $f((AC)) = (AC)$ ou (BD)

1) $I_O^-(\Gamma)$

Soit $s \in I_O^-(\Gamma)$, $s = s_\Delta$

- si $s_\Delta((AC)) = (AC)$ alors $s_\Delta((BD)) = (BD)$ car $s_\Delta(\{A,B,C,D\}) = \{A,B,C,D\}$

alors $\Delta = (AC)$ et $\Delta \perp (BD)$ ou $\Delta = (BD)$ et $\Delta \perp (AC)$

dc ds tous les cas $(AC) \perp (BD)$ ie Γ est un carré <u>absurde</u>

donc $s_\Delta(AC) = BD$

Or il existe exactement deux réflexions échangeant (AC) et (BD)

donc $s_\Delta = s_{\Delta 1}$ ou $s_{\Delta 2}$ où Δ_1 médiatrice de $[AB]$

Δ_2 ——— de $[AD]$

réciproquement on vérifie que $s_{\Delta 1} \in I_O^-(\Gamma)$ et $s_{\Delta 2} \in I_O^-(\Gamma)$.

2) $I_O^+(\Gamma)$

Un rectangle est un parallélogramme.

Donc $\{Id_P, r(O,\pi)\} \subset I_O^+(\Gamma)$ or $card(I_O^+(\Gamma)) = card(I_O^-(\Gamma))$

$= \{Id_P, r(O,\pi)\}$

V - Γ est un carré :

1) $I_O^-(\Gamma)$.

Un carré est un losange et un rectangle donc.

$\{s_{\Delta 1}, s_{\Delta 2}, s(AC), s(BD)\} \subset I_O^-(\Gamma)$

Si $s_\Delta \in I_O^-(\Gamma)$ $s_\Delta(A) \in \{A, B, C, D\}$

or il existe une unique reflexion échangeant deux pts donnés du plan.

s_Δ est une reflexion d'axe passant par O.

$s_\Delta(A) = A, B, C$ ou D ie 4 reflexions possible exactement

et donc $\boxed{\{s_{\Delta 1}, s_{\Delta 2}, s(AC), s(BD)\} = I_O^-(\Gamma)}$

2) $I_O^+(\Gamma)$

$card(I_O^-(\Gamma)) = card(I_O^+(\Gamma))$ dc comme carré est un parallélogramme ie $\{Id_P, r(O,\pi)\} \subset I_O^+(\Gamma)$.

La composée de deux reflexions d'axes secants est une rotation.

$(I_O(\Gamma), \circ)$ groupe.

$s_{\Delta 1} \circ s(BD) \in I_O(\Gamma)$ de plus $s_{\Delta 1} \circ s(BD) \in I_O^+(\Gamma)$ (car antidép o antidép)

de plus $s_{\Delta 1} \circ s(BD)(A) = s_{\Delta 1}(C) = D$ donc $s_{\Delta 1} \circ s(BD) = \boxed{r(O, \frac{\pi}{2}) \in I_O^+(\Gamma)}$

Même chose : $r(O, \frac{\pi}{2}) \circ r(O, \pi) = \boxed{r(O, \frac{3\pi}{2}) \in I_O^+(\Gamma)}$