Exposé 3 :

Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons. formule du Binôme. Applications.

0- Pré Requis :

- Notion d'ensemble fini, de cardinal.
- Définition de p-listes et p-arrangements d'un ensemble A de cardinal n

On sait dénombrer ces objets : dans un ensemble A à n éléments, le nombre de p-listes est n^p, le nombre de p-arrangements est $\frac{n!}{(n-p)!}$

I Combinaisons :

Déf : Etant donné un ensemble A, on appelle combinaison de p éléments de A toute partie de A de cardinal p. Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de cardinal n est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$

Thm : Si $p \leq n$ alors $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, sinon $C_n^p = 0$.

[$\mathcal{C}$: l'ensemble des p-combinaisons de A où card A = n

$\mathcal{A}$: l'ensemble des p-arrangements.

$|\mathcal{A}| = \frac{n!}{(n-p)!}$, or dans $\mathcal{A}$ l'ordre des éléments est indifférent) Alors que dans $\mathcal{C}$ l'ordre est important. Rq : dans $\mathcal{A}$ il y a des elts que l'on compte plusieurs fois puisque l'ordre est indifférent.

Si on a p élts, on a p! permutations des éléments donc :

$|\mathcal{C}| = \frac{|\mathcal{A}|}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$]

II Coefficients binomiaux :

Propriétés : i) $C_n^0 = C_n^n = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ii) $C_n^1 = n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

iii) $C_n^p = C_n^{n-p}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$, p entier.

iv) $C_{n+1}^{p+1} = \frac{(n+1)}{(p+1)} C_n^p$

[A l'oral avec raisonnement dénombrement : (Rq : Toutes ces props peuvent être démontrer d'après l'expression de C_n^p)

C_n^0 : je ne choisit aucun elt parmi n elts → 1 seule façon.

C_n^n : je choisit n elt parmit n elts → 1 seule façon.

C_n^1 : —— 1 —— → je peux en choisir n diff, → il y a de n façons.

$C_n^p = C_n^{n-p}$: A chaque fois qu'on choisit une partie à p élt il y a une partie à (n-p) elt correspondante. D'ou l'égalité.

$C_{n+1}^{p+1} = \frac{(n+1)}{(p+1)} C_n^p$. On fixe un elt parmit un ensemble à (n+1) elts. et on choisit p élts parmit les n restants (= C_n^p)

Mais il y a (n+1) elts pour choisir le premier elt donc le nb de partie (= $(n+1) C_n^p$)

et (p+1) correspond au nbr de parties identiques dans [$(n+1) C_n^p$]

[On peut montrer le raisonnement pour 4 elts].

Prop : (Relation du triangle de Pascal)

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1} \quad \forall n \geqslant 1,\ \forall p \in \mathbb{N} \quad 0 \leq p \leq n-1$$

[2 méthodes : avec l'expression de C_n^p et C_n^{p+1} mettre au même dénominateur ...
Dénombrement : Soit E un ensemble à $(n+1)$ elts et $a \in E$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties de E à $(p+1)$ éléments.

$\mathcal{P}_1$ ——— à $(p+1)$ ——— contenant a

$\mathcal{P}_2$ ——— ne contenant pas a

On a $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \text{card}(\mathcal{P}) = \text{card}\,\mathcal{P}_1 + \text{Card}\,\mathcal{P}_2 = C_n^p + C_n^{p+1}$

car $\text{card}\,\mathcal{P}_1 = C_n^p$

$\text{card}\,\mathcal{P}_2 = C_n^{p+1}$]

On peut ainsi construire le triangle de Pascal :

$n \backslash p$	0	1	2		p	p+1	n
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
n							
n+1							

$C_2^1 + C_2^2 = C_3^2$

$\quad\ \ 2 \qquad 1 \qquad 3$

$C_n^p \quad C_n^{p+1}$

C_{n+1}^{p+1}

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 = C_7^4$

Conséquence :

Prop : $\forall n, p \in \mathbb{N},\ p \leq n \quad C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$ c'est cette formule.

[Par récurrence sur n pour p fixé. La formule est triviale pour $p = n$
Et en appliquant la relation du triangle de Pascal]

III Formule du Binôme :

Thm : (Formule du Binôme de Newton).
Si a et b sont deux elts d'un anneau qui commutent entre eux, alors pour tout entier naturel n, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

[Peut se montrer facilement par récurrence.
Avec dénombrement : Le nbr de monômes $a^k b^{n-k}$ intervenant ds le développement de $(a+b)^n$ est égal au nbr d'expressions du type aabbab ... aabb où a est répété k fois. C'est donc aussi le nbr de façon de placer k éléments a dans une liste de n places, les autres places étant occupées par des b et l'ordre

de ces éléments n'ayant pas d'importance (puisque a et b commutent).
On trouve donc C_n^k monômes.]

Conséquences :

• $a=1, b=1$ $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ (1) donc $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ (Déjà vu dans la leçon sur les arrangements)

• $a=-1, b=1$ $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$ (2) (car $\underbrace{(a+b)}_{0}^n = \sum_{k=0}^{n} \cdots$)

On en déduit (3) $\sum_{\substack{k \leq n \\ k \text{ pair}}} C_n^k = \sum_{\substack{k \leq n \\ k \text{ impair}}} C_n^k = 2^{n-1}$

[(3) se déduit en faisant (1)+(2) : ... k pair et (1)-(2) : ... k impair].

Rq : on remarque qu'avec (3) on en déduit qu'un ensemble fini contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

IV Applications :

Exo 1) Ds un jeu de 32 cartes combien peut on dénombrer de mains de 5 cartes qui contiennent exactement 1 valet et 2 dames ?
$\Rightarrow$ Solution $C_4^1 \times C_4^2 \times C_{24}^2$

Exo 2 : Trigonométrie :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\cos nx$ peut s'écrire sous la forme d'un polynome de degré n en $\cos x$.

Exo 3 : Inégalité de Bernouilli
$\forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $(1+x)^n \geq 1 + nx$
[formule Binôme facile]

Demonstrations :

Prop : $\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$

[Récurrence sur n pour p fixé.
La formule est triviale pour p = n.

$n \in \mathbb{N} \; p \leq n : P_n : \text{"} \sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1} \text{"}$

soit $n \in \mathbb{N}$ $p \leq n$ on suppose que P_n est vraie.

$$\sum_{k=p}^{n+1} C_k^p = \underbrace{\sum_{k=p}^{n} C_k^p}_{} + C_{n+1}^p \underset{\uparrow \, HR}{=} C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^p \underset{\uparrow}{=} C_{n+2}^{p+1}$$

Relation de Pascal

Donc P_{n+1} est vérifiée.].

Exo 2 :

cosnx On a : $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$

On appliquant formule du binôme et identifiant partie réelle et imaginaire.

On obtient $\cos nx = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} (-1)^k \underbrace{(\sin x)^{2k}}_{\substack{\shortparallel \\ (1-\cos^2 x)^k}} (\cos x)^{n-2k}$