Exposé 29 :

Réflexion du plan échangeant deux droites sécantes données. bissectrices. Applications au triangle et au cercle. (Cercle-inscrit, tangentes à un cercle.

Cadre : On se place dans $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$ un plan affine euclidien orienté.

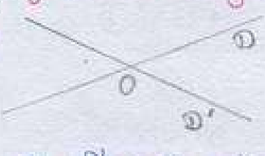
0 - Pré Requis :

- Angle orienté de vecteurs, noté $(\vec{u}, \vec{v})$ et relation de Chasles.
- Définition d'une réflexion et propriétés.
- Barycentres.
- Thm pythagore (utilisé prop métrique).

I Réflexion du plan échangeant deux droites sécantes données

Thm : Soit D et D' deux droites sécantes du plan. Il existe exactement deux réflexions échangeant D et D'

D



$\{O\} = D \cap D'$

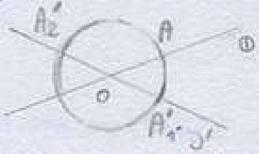
i) Supposons qu'il existe une telle réflexion d'axe $\Delta \subset \mathcal{P}$, s_Δ.

$s_\Delta(O) \subset s_\Delta(D) \cap s_\Delta(D') = D' \cap D = \{O\}$ donc $s_\Delta(O) = O$

Donc l'axe de cette réflexion est une droite passant par O.

Soit $A \in D \setminus \{O\}$ et $A' = s_\Delta(A)$ alors $A' \in D' \setminus \{O\}$ (car $s_\Delta(D \setminus \{O\}) = D' \setminus \{O\}$)

s_Δ conserve les distances donc $OA = OA'$ donc $A' \in \mathcal{C}(O, OA) \cap D'$



donc soit $s_\Delta(A) = A_1'$ avec Δ médiatrice de $[AA_1']$

ou soit $s_\Delta(A) = A_2'$ —— Δ —————— de $[AA_2']$

ii) Réciproquement soit Δ_1 la médiatrice de $[AA_1']$ et Δ_2 la médiatrice de $[AA_2']$

(Avec A, A_1', A_2' définis comme au dessus).

$s_{\Delta_1} : O \longrightarrow O$ et $s_{\Delta_2} : O \rightarrow O$

$\quad A \longrightarrow A_1' \qquad A \rightarrow A_2'$

$s_{\Delta_1}(D) = s_{\Delta_1}((OA)) = (s_{\Delta_1}(O) s_{\Delta_1}(A)) = (OA') = D'$

donc $s_{\Delta_1}(OA) = (OA_1')$ et $s_{\Delta_2}(OA) = (OA_2')$

$s_{\Delta_1}(D) = D'$ $\qquad s_{\Delta_2}(D) = D'$

Donc Δ_1 et Δ_2 sont les axes des réflexions qui échangent D et D'

Thm : Soit $[OA)$ et $[OB)$ deux demi droites de $\mathcal{P}$. Alors il existe une unique réflexion échangeant $[OA)$ et $[OB)$ [[découle de la démo préc, 1 seul point solution avec le cercle]]

Déf : Les deux axes de ces deux réflexions sont appelés les bissectrices des droites D et D'.

Prop : Les bissectrices Δ et Δ' de D et D' sont perpendiculaires.

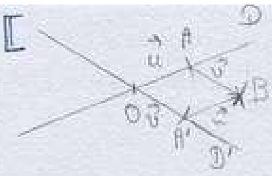
II Propriétés des Bissectrices :

1) Propriété vectorielle :

Prop : Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de D.

Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de D'

Alors $\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} + \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)$ et $\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} - \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)$ sont des vecteurs directeurs des bissectrices de D et D'

[

Soit $A \in D$ tq $\vec{OA} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$

$A' \in D'$ tq $\vec{OA'} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$

On a $OA' = OA$ et donc $A' = s_\Delta(A)$ où Δ médiatrice de $[AA']$

Soit B tq $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} + \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \vec{OB}$ donc $OABA'$ est un parallélogramme (car + de vect)

de plus $OA = OA' = 1$ donc $OABA'$ est un losange.

Donc (OB) est la médiatrice de $[AA']$ (diago losange $\perp$ et se coupent en leurs milieux)

donc $\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} + \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)$ est un vecteur directeur d'une bissectrice de D et D'.

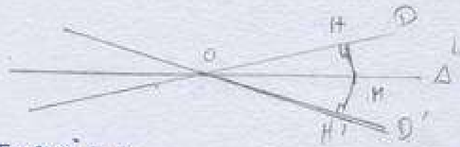
On a vu prop préc que les bissectrices sont perpendiculaires (ie les vects dir st orthogonaux)

$$\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} + \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} - \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right) = \frac{\vec{u}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} - \frac{\vec{v}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} - \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = 0$$

donc $\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} - \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)$ est un vect directeur de l'autre bissectrice de D et D']

2) Propriété métrique :

Prop : L'ensemble des points équidistants des droites D et $\mathcal{D}'$ est constitué des 2 bissectrices de ces 2 droites. ie $\Delta \cup \Delta' = \{M \in \mathcal{P} \mid d(M, D) = d(M, \mathcal{D}')\}$

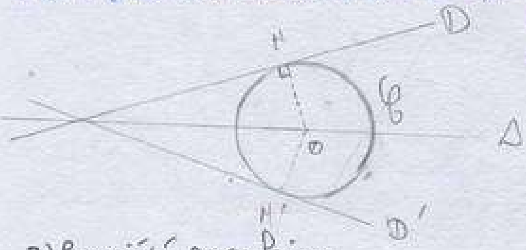


on a $MH = MH'$ où $H = proj_\perp^{D}(M)$

$H' = proj_\perp^{D'}(M)$

Exercice :

Montrer que tout cercle tangent à deux droites sécantes D et D', a son centre sur l'une des bissectrices de D et D'



[$d(O, D) \underset{\uparrow}{=} OH = OH' = d(O, D')$

D tangent à $\mathcal{C}$

$d(O, D) = d(O, D') \Rightarrow O \in \Delta \cup \Delta'$ biss de D et D' d'après prop précédente].

3) Propriété angulaire :

Prop : Soit $A \in \mathcal{D}$ et $A' \in \mathcal{D}'$, A et A' distincts de O.

$$\{M \in \mathcal{P} \setminus \{O\} \mid (\vec{OA}, \vec{OM}) = (\vec{OM}, \vec{OA'})\ [\pi]\} = \Delta \cup \Delta' \setminus \{O\}$$

III Applications aux triangles et aux cercles :

1) Triangle :

Soit ABC un triangle non applati.

Déf : On appelle bissectrice intérieure de $[AB)$ et $[AC)$ l'unique droite Δ_A passant par A telle que $s_{\Delta_A}([AB)) = [AC)$ et bissectrice extérieure de $[AB)$ et $[AC)$ la perpendiculaire à Δ_A passant par A, on note Δ_A' cette droite

On appelle bissectrices intérieures (resp extérieures) de ABC les bissectrices intérieures (resp extérieures) des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, $[BA)$ et $[BC)$ et $[CA)$ et $[CB)$

Prop: $\Delta_A \setminus \{A\} = \{M \in \mathcal{P} \setminus \{A\} \mid (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) [\pi]\}$

Thm: i) Les bissectrices intérieures de ABC sont concourantes en I barycentre du système $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ où $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

ii) La bissectrice intérieure de ABC issue de A (resp issue de B, issue de C) est concourante avec les deux bissectrices extérieures issues de B et C (resp A et C et resp A et B) en $I_A = \mathrm{bar}\{(A,-a),(B,b),(C,c)\}$ (resp $I_B = \mathrm{Bar}\{(A,a),(B,-b),(C,c)\}$ et resp $I_C = \mathrm{Bar}\{(A,a),(B,b),(C,-c)\}$)

Corollaire: Il existe quatre cercles tangents aux droites (AB), (BC) et (AC)

i) Le cercle de centre I est appelé cercle inscrit à ABC

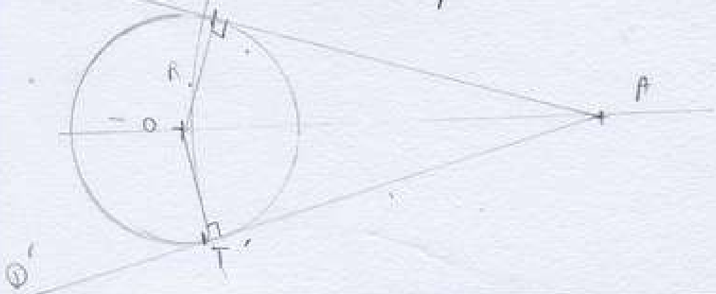
figure

ii) Les cercles de centre I_A, I_B, I_C sont appelés cercles exinscrits à ABC

[pour le thm, on utilise prop vectoriel des bissectrices et def vectoriel du Barycentre.

2) Tangente à un cercle :

Prop: Soit $\mathcal{C}(O,R)$, soit M un point extérieur à $\mathcal{C}$. Il existe exactement deux droites D et D' passant par A et tangentes à $\mathcal{C}$. Leurs points de contact T et T' sont les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec le cercle de diamètre $[OA]$



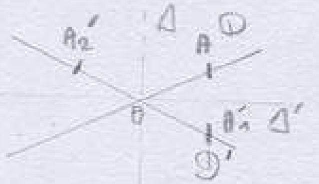
[$OT = OT'$ donc $T \in \mathcal{C}(O,R)$ de plus on a facilement $TA = T'A$

2x pythagore ($OT = OT' = R$) 2x OA

donc $T, T' \in \mathcal{C}(O,R) \cap \mathcal{C}$ de diamètre $[OA]$

Exposé 29 : Démonstration

Prop : Les bissectrices Δ et Δ' de D et D' sont perpendiculaires :



$s_\Delta(D) = s_{\Delta'}(D) = D'$ $\quad s_\Delta(D') = s_{\Delta'}(D') = D$

$s_\Delta \circ s_{\Delta'} : O \longmapsto O$ ie O milieu de $[A_1'A_2']$

$A_1' \longmapsto A_2'$

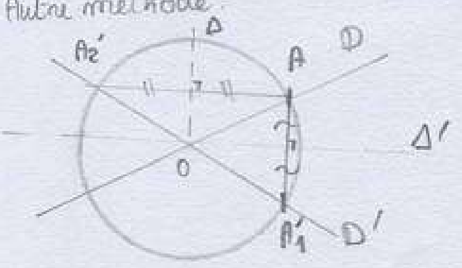
$\theta = (\Delta, \Delta')\ [\pi]$ $\quad s_\Delta \circ s_{\Delta'} = r_{(O, 2\theta)} = r_{O,\pi}$

donc $2\theta = \pi\ [2\pi]$

et $\theta = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Donc Δ et Δ' st perpendiculaires.

Autre méthode :



On a vu Δ médiatrice de $[AA_2']$

Δ' ——— de $[AA_1']$

or A_2', A, A_1' st inscrit ds un cercle de diamètre $A_1'A_2'$ donc

$A_2'A_1'A$ tr rect en A ie $(AA_2') \perp (AA_1')$

et dc $\Delta \perp \Delta'$

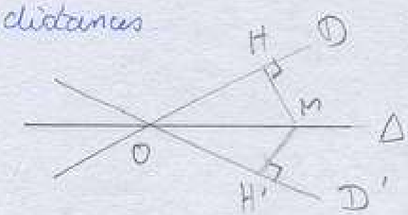
Prop : $\Delta \cup \Delta' = \{M \in \mathcal{P} \mid d(M,D) = d(M,D')\}$

[• Soit $M \in \Delta \cup \Delta'$.

$d(M,D) = d(s_\Delta(M), s_\Delta(D)) = d(M,D')$ donc $M \in \{M \in \mathcal{P} \mid d(M,D) = d(M,D')\}$

car s_Δ réflexion donc conserve les distances

• Réciproquement :



Soit $M \in \{M \in \mathcal{P}$ tq $d(M,D') = d(M,D)\}$

Soit $H = proj^{\perp}_{D}(M)$ et $H' = proj^{\perp}_{D'}(M)$

$d(M,D) = d(M,D') \iff MH = MH'$

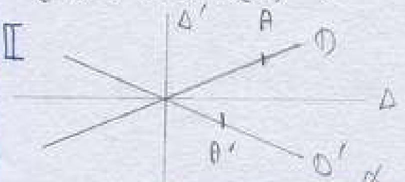
Pythagore ds tr rect $OH'M$ et OHM : $\begin{cases} OM^2 = OH^2 + HM^2 \\ OM^2 = OH'^2 + H'M^2 \end{cases} \Rightarrow OH = OH'$ donc $s_\Delta(H) = H'$

$s_\Delta(H) = H'$ donc la médiatrice de $[HH']$ est la bissectrice Δ.

et $MH = MH'$ donc $M \in$ médiatrice de $[HH']$

dc $M \in \Delta \cup \Delta'$]

Prop: $A \in D$, $A' \in D'$, $A \neq O$ et $A' \neq O$
$\{M \in \mathcal{P} \setminus \{O\} \mid (\vec{OA}, \vec{OM}) = (\vec{OM}, \vec{OA'})\,[\pi]\} = \Delta \cup \Delta' \setminus \{O\}$.



α β

* Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{O\}$ tq $(\vec{OA}, \vec{OM}) = (\vec{OM}, \vec{OA'})\,[\pi]$
Posons $\tilde{\Delta} = (OM)$ on considère $s_{\tilde{\Delta}}$.
Soit $A'' = s_{\tilde{\Delta}}(A)$ γ
$\overbrace{(\vec{OA}, \vec{OM})}^{\alpha} = (\vec{OM}, \vec{OA''})\,[2\pi]$ (prop des réflexions $\alpha \to -\alpha$ pour angles orientés)

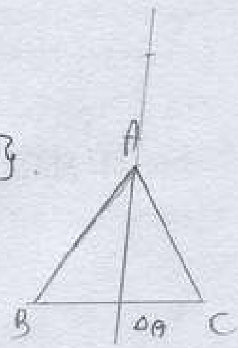
$\boxed{(\vec{OM}, \vec{OA'}) = (\vec{OM}, \vec{OA''})\,[\pi]}$ car $\alpha = \beta\,[\pi] \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi$
$\alpha = \gamma\,[2\pi] \Leftrightarrow \alpha = \gamma + 2k\pi$
$\beta + k\pi = \gamma + 2k\pi$
$\beta = \gamma + k\pi$!!!
$\beta = \gamma\,[\pi]$!!

donc $\begin{cases} A'' = s_{\tilde{\Delta}}(A) \in (OA') = D' \\ s_{\tilde{\Delta}}(O) = O \end{cases}$ donc $(OA'') = D'$

d'où $s_{\tilde{\Delta}}(OA) = (OA'')$
$s_{\tilde{\Delta}}(D) = D'$
donc $\tilde{\Delta}$ est une bissectrice de D et D' $\boxed{\text{ie } M \in \Delta \cup \Delta'}$

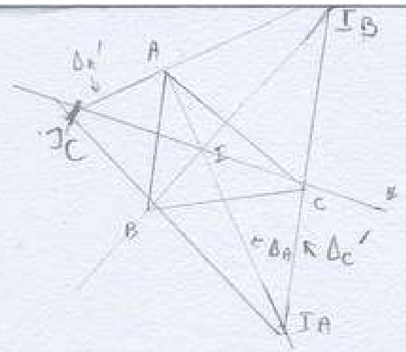
* Réciproquement
Soit $M \in \Delta \cup \Delta' \setminus \{O\}$.
$s_\Delta(D) = D'$
$A'' = s_\Delta(A) \in D'$
$(\vec{OA}, \vec{OM}) = (\vec{OM}, \vec{OA''})\,[2\pi]$
$(\vec{OM}, \vec{OA'}) = (\vec{OM}, \vec{OA''})\,[\pi]$ car $A', A'' \in D'$
donc $\boxed{(\vec{OA}, \vec{OM}) = (\vec{OM}, \vec{OA'})\,[\pi]}$]

Prop: $\Delta_A \setminus \{A\} = \{M \in \mathcal{P} \setminus \{A\} \mid (\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AC})\,[2\pi]\}$.



[• Soit $M \in \Delta_A \setminus \{A\}$ $s_{\Delta_A}([AB)) = [AC)$
Soit $B' = s_{\Delta_A}(B)$ et $B' \in [AC)$
donc $(\vec{AM}, \vec{AC}) = (\vec{AM}, \vec{AB'})\,[2\pi]$
et $(\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AB'})\,[2\pi]$ prop reflexion.
donc $(\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AC})\,[2\pi]$.

• Réciproquement: Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$ tq $(\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AC})\,[2\pi]$
On pose $\Delta = (AM)$ et $B' = s_\Delta(B)$
$(\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AB'})\,[2\pi]$ prop reflexion.
d'où $(\vec{AM}, \vec{AB'}) = (\vec{AM}, \vec{AC})\,[2\pi]$ donc $B' \in [AC)$ ie $s_\Delta([AB)) = [AC)$ ie $\Delta = \Delta_A$.



$I = \text{Bar}\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$

Mq $I \in \Delta_A \cap \Delta_B \cap \Delta_C$

Mq $I \in \Delta_A$

$I = \text{Bar}\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$

ie $(a+b+c)\vec{AI} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$

donc $\vec{AI}$ colinéaire à $b\vec{AB} + c\vec{AC}$

de plus $\dfrac{b\vec{AB} + c\vec{AC}}{bc} = \dfrac{\vec{AB}}{c} + \dfrac{\vec{AC}}{b}$ or $AB = c$ et $AC = b$

donc $\dfrac{\vec{AB}}{c} + \dfrac{\vec{AC}}{b}$ sont des vecteurs unitaires directeurs de (AB) et (AC)

prop vectorielle :

$\vec{u}$ vect dir de $\mathcal{D}$,

$\vec{v}$ ——— $\mathcal{D}'$

alors $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} + \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ vect dir d'une bissectrice de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

donc $\dfrac{\vec{AB}}{c} + \dfrac{\vec{AC}}{b}$ est donc un vecteur directeur de la bissectrice intérieur issue de A.

or (AI) colinéaire à $\dfrac{\vec{AB}}{c} + \dfrac{\vec{AC}}{b}$ dc $I \in \Delta_A$.

Même chose pour $I \in \Delta_B$ et $I \in \Delta_C$

$I_A = \text{Bar}\{(A,-a),(B,b),(C,c)\}$ Mq $I_A \in \Delta_B' \cap \Delta_A \cap \Delta_C'$

alors $(-a+b+c)\vec{BI_A} = -a\vec{BA} + c\vec{BC}$

donc $\vec{BI_A}$ colinéaire à $-a\vec{BA} + c\vec{BC}$

or $\dfrac{-a\vec{BA} + c\vec{BC}}{ac} = \underbrace{-\dfrac{\vec{BA}}{c}}_{\text{vect directeur unitaire de (BA)}} + \underbrace{\dfrac{\vec{BC}}{a}}_{\text{vecteur unitaire dir de (BC)}}$

$\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} - \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ vect dir de la bissectrice extérieure issue de B.

où $\vec{u}$ vect dir de (BA) et $\vec{v}$ vect dir de (BC)

dc $I_A \in \Delta_B'$

Même chose pour $I_A \in \Delta_C'$ et $I_A \in \Delta_A$ $\square$

Pour les cercles tangents on utilise caractérisation métrique des bissectrices.