Exposé 28 :
Réflexion du plan échangeant deux points donnés ; médiatrices, régionnement associé. Application au triangle et au cercle (cercle circonscrit ; angle inscrit ...)

Cadre : $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$ plan affine euclidien orienté.

0 Pré-Requis
- Définition d'une droite
- produit scalaire
- projection orthogonale
- réflexion et ses propriétés.
- Calcul vectoriel
- notion d'angle orienté de vecteurs ; noté $(\vec{u}, \vec{v})$

I. Réflexion du plan échangeant deux points donnés :

Déf : Soit Δ une droite de $\mathcal{P}$ et M un point de $\mathcal{P}$. On appelle réflexion d'axe Δ l'application $s_\Delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $M \to M'$ telle que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ où H est le projeté orthogonal de M sur Δ i.e. $H = p_{\perp\Delta}(M)$

Propriétés : La réflexion d'axe Δ est une isométrie du plan, elle est involutive et Δ est l'ensemble des points invariants de s_Δ.

Prop : Une réflexion transforme un angle de vecteurs en son opposé.

Thm : Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$. Il existe une unique réflexion échangeant A et B.

[On suppose que cette réflexion existe, on la note s_Δ. On a $s_\Delta(A) = B$. Par définition de s_Δ, Δ est perpendiculaire à (AB) et passe par H le milieu de $[AB]$. Cette droite est unique.].

Déf : L'axe de la réflexion échangeant A et B est appelé médiatrice du segment $[AB]$.

II Régionnement du plan associé à la médiatrice d'un segment :

1) Propriété de la médiatrice

Thm : Soit A, B deux points distincts de $\mathcal{P}$. La médiatrice Δ du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B. $\Delta = \{M \in \mathcal{P} / MA = MB\}$

[Soit Δ la médiatrice de $[AB]$
- Soit $M \in \Delta$. Soit s_Δ la réflexion d'axe Δ.

  On a $s_\Delta(M) = M$ car $M \in \Delta$ et $s_\Delta(A) = B$

  De plus comme la réflexion conserve les distances $MA = s_\Delta(M)s_\Delta(A) = MB$
- Réciproquement. Soit $M \in \mathcal{P}$ tq $MA = MB$

  $\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$

  Soit I le milieu de $[AB]$ $\Leftrightarrow (\cancel{\overrightarrow{MI}} + \overrightarrow{IA} - \cancel{\overrightarrow{MI}} - \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} + \cancel{\overrightarrow{IA}} + \overrightarrow{MI} + \cancel{\overrightarrow{IB}}) = 0$

  $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$ donc $M = I$ ou $(MI) \perp (AB)$ $\Rightarrow M \in \Delta$

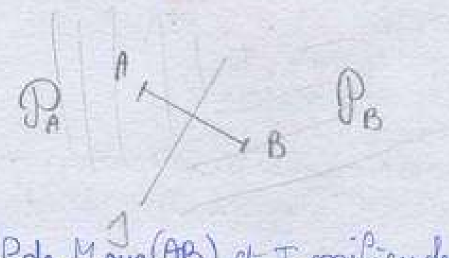
]

Application : on peut construire la médiatrice de [AB] à la règle et au compas grâce à cette propriété.

2) Partition du plan :

Thm : Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$. Δ la médiatrice de [AB] sépare le plan $\mathcal{P}$ en deux demi-plans $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$ de frontière Δ, l'un contenant A l'autre B.

$\mathcal{P}_A = \{M \in \mathcal{P} \mid MA < MB\}$
$\mathcal{P}_B = \{M \in \mathcal{P} \mid MA > MB\}$
$\Delta = \{M \in \mathcal{P} \mid MA = MB\}$



[Soit $M \in \mathcal{P}$ et H le projeté orthogonal de M sur (AB) et I milieu de [AB]

On a $MA^2 - MB^2 = (\vec{MA} - \vec{MB})(\vec{MB} + \vec{MA})$
$= 2\vec{BA} \cdot \vec{MI}$
$= 2\vec{BA} \cdot (\vec{MH} + \vec{HI})$
$= 2\vec{AB} \cdot \vec{IH}$ car $(MH) \perp (AB)$

Donc $MA < MB$ ssi $2\vec{AB} \cdot \vec{IH} < 0$ ie ssi $\vec{AB}$ et $\vec{IH}$ sont de sens contraire.
ie $H \in$ demi droite ouverte (AB) délimitée par I et contenant A.

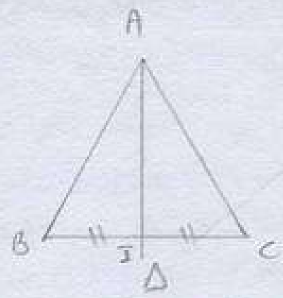
$MA > MB$ ...]

III Application au triangle et au cercle :

1) Triangle isocèle :

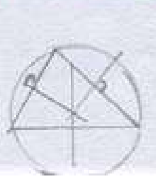
Thm : Soit ABC un triangle non aplati et soit Δ la médiatrice de [BC] et I le milieu de [BC]. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le triangle ABC est isocèle en A.
ii) Δ est la hauteur issue de A.
iii) Δ est la médiane issue de A.
iv) Δ est la bissectrice intérieure de ABC issue de A.
v) $(\vec{BA}, \vec{BI}) = (\vec{C}\ , \vec{CA})$ $[2\pi]$
vi) $(\vec{AB}, \vec{AI}) = (\vec{AI}, \vec{AC})$ $[2\pi]$



2) Cercle circonscrit au triangle :

Thm : Soit ABC un triangle non applati, les médiatrices des trois cotés sont concourantes en un point O qui est le centre du cercle passant par A, B et C. On nomme ce cercle, cercle circonscrit au triangle ABC.



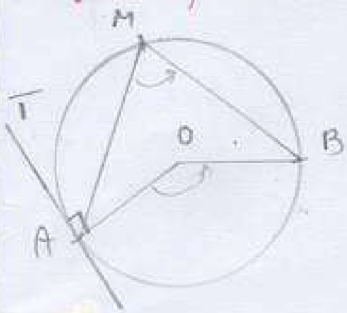
[On utilise la propriété caractéristique de la médiatrice. ie ensemble des pts équidistants.]

3) Construire un triangle :

Exercice : Soit Δ_1, Δ_2, Δ_3 trois droites sécantes en O. Construire A, B, C tels que Δ_1, Δ_2 et Δ_3 soient les médiatrices du triangle ABC.

4) Théorème de l'angle inscrit

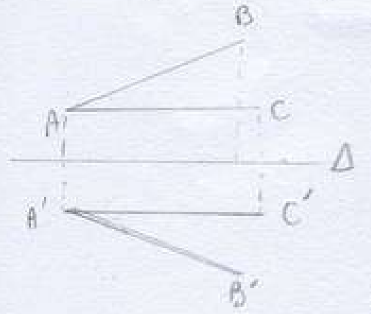
Thm : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. A et B deux points distincts de $\mathscr{C}$.
$\forall M \in \mathscr{C}$, M distinct de A et B on a $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ $[2\pi]$



Soit T_A la tangente à $\mathscr{C}$ en A. Alors $\forall T \in T_A \setminus \{A\}$ on a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})$

Exposé 28 : Démonstrations :

Prop : Une réflexion transforme un angle de vecteurs en son opposé.



$$(\vec{AC},\vec{AB}) \equiv (\vec{AC},\vec{AA'}) + (\vec{AA'},\vec{A'B'}) + (\vec{A'B'},\vec{A'C'}) + (\vec{A'C'},\vec{B'B}) + (\vec{B'B},\vec{AB}) \ [2\pi]$$

$$(\vec{AC},\vec{AB}) \equiv (\vec{AC},\vec{AA'}) + (\vec{AA'},\vec{A'B'}) + (\vec{A'B'},\vec{A'C'}) + (\vec{A'C'},\vec{A'A}) + (\vec{A'A},\vec{AB})$$

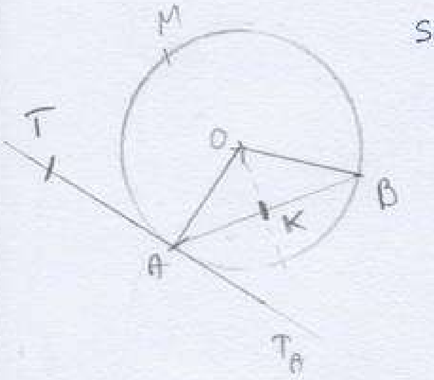
$$\equiv (\vec{AC},\vec{AA'}) + (\vec{AA'},\vec{A'B'}) + (\vec{A'B'},\vec{A'C'}) \ (\vec{C'A'},\vec{AA'}) + (\vec{AA'},\vec{BA})$$

$$\equiv (\vec{AB},\vec{AC}) - (\vec{A'C'},\vec{A'B'}) - (\vec{A'C'},\vec{A'B'}) \ [2\pi]$$

$$2(\vec{AC},\vec{AB}) = -2(\vec{A'C'},\vec{A'B'}) \ [2\pi]$$

Suite du Thm de l'angle inscrit :

Mq : $2(\vec{AT},\vec{AB}) = (\vec{OA},\vec{OB})$



Soit K le milieu de [AB]

$$(\vec{OA},\vec{OB}) \underset{\text{Thm angle inscrit}}{=} 2(\vec{OA},\vec{OK}) \ [2\pi]$$

Tr isocèle

$$= 2\left[(\vec{OA},\vec{AT}) + (\vec{AT},\vec{AB}) + (\vec{AB},\vec{OK})\right] \ [2\pi]$$

or $2(\vec{OA},\vec{AT}) = \pi$ et $2(AB,\vec{OK}) = \pi$

$$= 2\pi + 2(\vec{AT},\vec{AB}) \ [2\pi]$$

$$= 2(\vec{AT},\vec{AB}) \ [2\pi] \quad]$$

Retour sur l'exo $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ médiatrice de ABC sécante en O trouver A, B, C.

On considère $f = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3}$ qui est un antidéplacement comme composée de $\underline{\underline{3}}$ antidéplacements (ie det = −1) dc f est un antidéplacement du plan (ie sym glissée)

or f a O comme pt fixe dc f est une réflexion. f

Δ_1 = méd [AB], Δ_2 méd [BC], Δ_3 méd [AC] $A \xrightarrow{s_{\Delta_3}} C \xrightarrow{s_{\Delta_2}} B \xrightarrow{s_{\Delta_1}} A$ dc A fixe par f

donc f est une réflexion d'axe (OA) il suffit de trouver l'axe de cette réflexion facile. M, M' = f(M) dc (OA) = médiatrice de [MM']

Il suffit de prendre un pt M de trouver son image par f et de tracer la médiatrice de [MM'], ensuite on place A sur cette médiatrice (quelconque pour A) et on trouve B et C.