Exposé 27 :

Homothéties et translations. Transformation vectorielle associée. Invariants élémentaires : effet sur les directions, l'alignement, les distances... Applications à l'action sur les configurations usuelles.

Cadre : $(E, \vec{E})$ espace affine ($\vec{E}$ est l'espace vectoriel associé à E). appli linéaire de $\vec{E}, \vec{E}'$

0 - Pré Requis :

- Calculs vectoriels.
- Espace affine, application affine. def $f : E \to E'$ app affine ssi $\exists A \in E$ et $\exists \vec{f} \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{E}')$ $\forall M \in E$ $f(M) = f(A) + \vec{f}(\vec{AM})$
- Une application est affine ssi elle conserve les barycentres !

I Homothéties et translations :

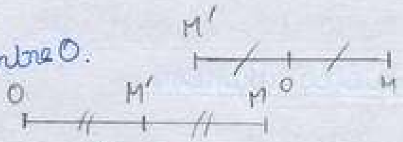
1) Définitions

Def. Une homothétie de centre $O \in E$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est une application
$h_{O,k} : E \to E$, $M \to M'$ tel que $\vec{OM'} = k\vec{OM}$

Rq : O, M et M' sont alignés.

Ex : i) $k = -1$ $h_{O,-1}$ est une symétrie de centre O.

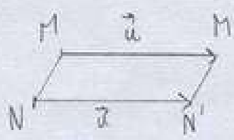
ii) $k = 1/2$, M' milieu de $[OM]$



Def : Une translation de vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$ est une application
$t_{\vec{u}} : E \to E$, $M \to M'$ tq $\vec{MM'} = \vec{u}$

Ex : i) $\vec{u} = \vec{0}$ $t_{\vec{0}} = Id_E$

ii) $\vec{u} \neq \vec{0}$ $t_{\vec{u}} : M \to M'$, $N \to N'$ $MM'N'N$ est un parallélogramme.



2) Propriétés

Prop : La translation $t_{\vec{u}}$ est bijective, d'inverse $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$

Prop : Une homothétie $h_{O,k}$ de rapport k non nul est bijective, d'application réciproque $(h_{O,k})^{-1} = h_{O,\frac{1}{k}}$

3) Transformation vectorielle associée :

Prop fondamentale : Soit $O, M, N \in E$, $k \in \mathbb{R}^*$, $\vec{u} \in \vec{E}$

i) $M' = h_{O,k}(M)$ et $N' = h_{O,k}(N)$ alors $\vec{M'N'} = k\vec{MN}$

ii) $M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $N' = t_{\vec{u}}(N)$ alors $\vec{M'N'} = \vec{MN}$

Def : i) L'application vectorielle associée à $h_{O,k}$ est l'application $k Id_{\vec{E}} : \vec{E} \to \vec{E}$, $\vec{v} \to k\vec{v}$

ii) L'application vectorielle associée à $t_{\vec{u}}$ est l'application $Id_{\vec{E}} : \vec{E} \to \vec{E}$, $\vec{v} \to \vec{v}$

Conséquence : Les homothéties et les translations sont des applications affines car leurs applications vectorielles associées sont linéaires.

Thm: Si pour $f : E \to E$, il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tq $\forall M, N \in E$ $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$
alors i) si $k = 1$, f est une translation.
ii) si $k \neq 1$, f est une homothétie.

[i) $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \iff M'N'NM$ est un parallélogramme
$\iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$
$\iff f = t_{\vec{u}}$

ii) Si $k \neq 1$, fixons $O \in E$. On a $\overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{OM}$ $\forall M \in E$

Alors $f(M) = M \iff \overrightarrow{O'M} = k\overrightarrow{OM} \iff (k-1)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'O} \iff \overrightarrow{OM} = \frac{1}{k-1}\overrightarrow{O'O}$ unicité de $M \in E$ tq $f(M) = M$

cela montre que f admet un unique point fixe.
Soit Ω ce point fixe. L'égalité $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ vraie $\forall M \in E$ montre alors que f est une homothétie de centre Ω et de rapport k]

II Invariants élémentaires:

1) Barycentres:

Prop: Les homothéties, les translations conservent les barycentres.
[On a déjà vu que les homo et les translations sont des applications affines alors conservation des barycentres. (appli affine : conserve barycentre).]

2) Ensembles invariants:

	Points fixes	Droites invariantes
$h_{O,k}$, $k \neq 1$	O	Droites qui passe par O.
$t_{\vec{u}}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$	aucun	Droites dirigées par $\vec{u}$

3) Image d'une droite

Prop: Soit f une homothétie ou une translation, et D une droite. Alors l'image de D par f est une droite D' parallèle à D.
ie $f(D) = D'$ et $D // D'$.

[- Le fait que l'image d'une droite est une droite vient du fait que f conserve les barycentres (ie la droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A, B ....)

- Ensuite, soit $D = (AB)$ donc $D' = (A'B')$
on utilise la prop fondamentale ie si f translation $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ ie $D // D'$
si f homothétie $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ ie $D // D'$]

Conséquence: f conserve l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité.

4) Les angles:

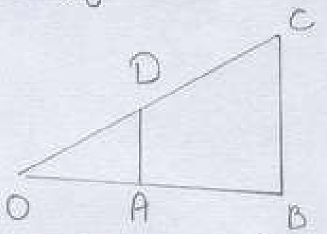
Prop: Les homothéties, translations conservent les angles orientés.
[évident on utilise prop fondamentale] ie $(\vec{u}, \vec{v})$, soit $A \in E$, $\exists B, C \in E$ tq $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
$(\vec{f}(\vec{u}), \vec{f}(\vec{v})) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}) = (\vec{u}, \vec{v})$

5) Notion métrique:

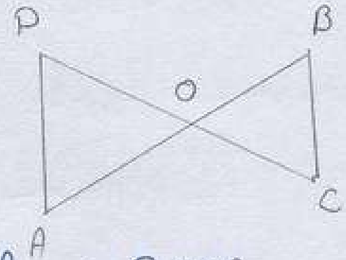
Prop : i) Les translations conservent les distances et les aires.
ii) Les homothéties multiplient les distances par k et les aires par k^2.

III Applications :

1) Configuration de Thalès :



$(DA) \parallel (CB)$



Montrer que $h_{O,k} : A \to B$ transforme D en C.

[$(DA) \parallel (CB)$ dc d'après Thalès : $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = k$

$h_{O,k} : A \to B \Leftrightarrow \vec{OB} = k\vec{OA} \Leftrightarrow \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = k$

on a donc $\overline{OD} = k\overline{OC}$ or O, D, C aligné (config Thalès)

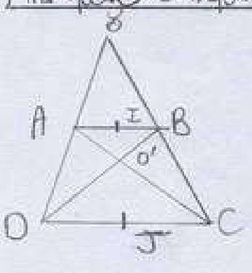
ie $\vec{OD} = k\vec{OC}$ et $h_{O,k}(D) = C$]

2) Image d'un cercle, d'un carré, d'un cube.

Etudier l'image de ces configurations avec les homothéties et translations.

translation : conserve longueur. Donc m config mais translaté.
homothétie : multi longueur par k. Donc figure homothétique (ie carré aire $\times k^2$
sphère volume $\times k^3$ ...)

3) Trapèze complet :



Soit ABCD un trapèze tel que $(AB) \parallel (DC)$
(AD) et (BC) se coupent en O. (AC) et (BD) se coupent en O'
I milieu de [AB] et J milieu de [DC]

Montrer que O, I, O', J sont alignés.

[Mq O, I, J alignés on utilise l'homothétie
h_O de centre O et de rapport $\frac{\overline{OA}}{\overline{OD}}$

Par thalès $\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}}$ O,B,C alignés $\Rightarrow$ $h_O : A \to D$
$\quad B \to C$

Les homothéties conservent les milieux dc I milieu [AB]
J milieu de [A'B'] = [DC] ie $h_O : I \to J$

$\boxed{\text{O, I, J alignés}}$

Mq : I, O', J alignés on considère
$h_{O'} : A \to C$ thalès $h_{O'} : B \to D$ conserve milieu I mil [AB]
J mil [CD]
$h_{O'}(I) = J \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{O', I, J alignés}}$

4) Droite D'Euler :

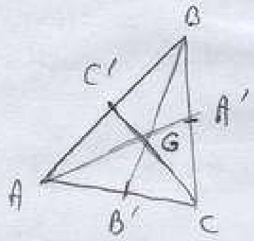
ABC un triangle, montrer que le centre de gravité G, l'orthocentre H et centre du cercle circonscrit sont alignés et que $3\vec{OG} = \vec{OH}$

[Démo droite remarquable du triangle].

I $G = Bar\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$

H : intersection des hauteurs : orthocentre

O = centre du cercle circonscrit :



On a $\vec{GA} = -2\vec{GA'}$

$\vec{GB} = -2\vec{GB'}$ et $\vec{GC} = -2\vec{GC'}$

donc on considère $h = h_{G,-2}$

h : $A' \to A$, $B' \to B$, $C' \to C$ dc $h(A'B'C') =$ tr ABC.

De plus h transforme les médiatrices de (ABC) en hauteurs de (ABC)

II Δ_A est médiatrice $[BC]$

Δ_B ——— $[AC]$

Δ_C ——— $[AB]$

$h(\Delta_A)$ est une droite // à Δ_A (prop homothétie) et qui passe par $h(A') = A$

$h(\Delta_A) // \Delta_A$ or $\Delta_A \perp (BC)$ ie $h(\Delta_A) \perp BC$ et passe par A.

ie $h(\Delta_A)$ = hauteur issue de A.

$h(\Delta_B)$ = ——— B

$h(\Delta_C)$ = ——— C

$\Delta_A \cap \Delta_B \cap \Delta_C = O$ et $h(\Delta_A) \cap h(\Delta_B) \cap h(\Delta_C) = H$

ie $h(O) = H$ ce qui donne $h_{G,-2}(O) = H$

ie G, O, H alignés

et $\vec{GH} = -2\vec{GO}$

ie $\boxed{\vec{OH} = 3\vec{OG}}$

Bijective ?

Prop : [évident surjective, injective évident]

Prop (fondamentale) : soit $O, M, N \in \mathcal{E}$, $k \in \mathbb{R}^*$, $\vec{u} \in \vec{E}$

i) $M' = h_{O,k}(M)$ et $N' = h_{O,k}(N)$ alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

ii) $M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $N' = t_{\vec{u}}(N)$ alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

[i) $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$

$\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})$

$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

ii) $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$

ie $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$

ie $MM'N'N$ parallélogramme

ie $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

]