Exposé 26 :

Equation cartésienne d'une droite du plan euclidien. Application à l'étude d'inéquations de la forme $a\cos t + b\sin t \geq c$

Cadre : On se place dans $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$ plan affine euclidien muni d'une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0. Pré-Requis :

- Notion de vecteurs colinéaires et orthogonaux
- La définition d'une droite.
- Notion de vecteurs directeurs et normaux.
- Notion de droites parallèles, perpendiculaires.

I équation cartésienne d'une droite du plan :

1) Cas général :

Thm : i) Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b) \neq (0,0)$ tels que $M\binom{x}{y} \in \mathcal{D} \iff ax + by + c = 0$

ii) Réciproquement. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $(a,b) \neq (0,0)$. L'ensemble $\mathcal{D} = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid ax + by + c = 0\}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$

iii) ______ . Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $(a,b) \neq (0,0)$. L'ensemble $\mathcal{D} = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid ax + by + c = 0\}$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$

Rq : Pour désigner une droite $\mathcal{D}$ on utilisera les notations $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(A, \vec{n}^{\perp})$ où A pt et vect norm

i) Soit $\mathcal{D}(A, \vec{n}^{\perp})$ une droite du plan avec $A(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ et $\vec{n}\binom{a}{b}$ vect normal de $\mathcal{D}$.

$$M\binom{x}{y} \in \mathcal{D} \iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$
$$\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$
$$\iff ax + by \underbrace{- ax_0 - by_0}_{c} = 0$$

ii) et iii) $\mathcal{D}$ non vide (facile de trouver un pt vérifiant $ax + \dots$)

$\mathcal{D} = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid ax + by + c = 0\}$

Soit $M(x,y) \in \mathcal{D}$ et $A(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ ie $ax + by + c = 0$ et $ax_0 + by_0 + c = 0$

$$ax + by + c = ax_0 + by_0 + c$$

$\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \iff \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$ où $\vec{n}\binom{a}{b}$ et $\vec{AM}\binom{x - x_0}{y - y_0}$

$\iff -a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0 \iff \det(\vec{u}, \vec{AM}) = \begin{vmatrix} -b & x - x_0 \\ a & y - y_0 \end{vmatrix} = 0$ où $\vec{u}\binom{-b}{a}$ et $\vec{AM}\binom{x - x_0}{y - y_0}$

Def : L'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ est appelée équation cartésienne de $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$

2) Equation réduite :

Prop : Si $\mathcal{D}$ non parallèle à $(O, \vec{j})$, elle possède une unique équation de la forme $y = mx + p$ (1)

Def : (1) est appelée équation réduite de $\mathcal{D}$.
m est le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ et p l'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$.

Rq : Si $\mathcal{D} \,//\, (O, \vec{j})$ alors $\mathcal{D}$ admet une équation de la forme $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

3) Droites parallèles et orthogonales :

Thm : Soit D la droite du plan d'équation $ax+by+c=0$ $(a,b)\neq(0,0)$
et D' ———————————— $a'x+b'y+c'=0$ $(a',b')\neq(0,0)$

i) $D \parallel D' \Leftrightarrow ab'-ba'=0$

ii) $D \perp D' \Leftrightarrow aa'+bb'=0$

[Passer par les vecteurs directeurs et les vecteurs normaux, colinéarité et orthogonalité.]

Prop : Soit D une droite du plan d'équation réduite $y=mx+p$
et D' ———————————— $y=m'x+p'$

alors $D \parallel D' \Leftrightarrow m=m'$

$D \perp D' \Leftrightarrow mm'=-1$

[se ramener à une équation cartésienne et utiliser thm préc]

II. Complément sur la droite :

1) Distance d'un point à une droite :

Thm : La distance du point $M(x_M, y_M)$ à la droite D d'équation $ax+by+c=0$
$(a,b)\neq(0,0)$ est $d(M,D)=\dfrac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

[Soit $H=\text{proj}_{\perp D}(M)$ $\quad d(M,D)=MH=\dfrac{|\overrightarrow{MH}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\dots$]

2) Régionnement du plan par une droite :

Thm : Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $(a,b)\neq(0,0)$. La droite $D : ax+by+c=0$ partage le plan $\mathcal{P}$ en deux demi-plans ouverts.

$\mathcal{P}^+=\{M(x,y) \mid ax+by+c>0\}$ et $\mathcal{P}^-=\{M(x,y) \mid ax+by+c<0\}$

et on a $\mathcal{P}=\mathcal{P}^+\cup\mathcal{P}^-\cup D$

III. Application à l'étude de l'inéquation $a\cos t+b\sin t>c$:

Soit (E) l'inéquation $a\cos t+b\sin t>c$, $(a,b)\neq(0,0)$ $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$

$t\in\mathbb{R}$ solution de $(E) \Leftrightarrow (x,y)$ solution de $\begin{cases} ax+by>c \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ où $x=\cos t$ et $y=\sin t$

$\Leftrightarrow M(x,y)\in\mathcal{C}\cap\mathcal{P}^+=\mathcal{E}$ avec $x=\cos t$, $y=\sin t$

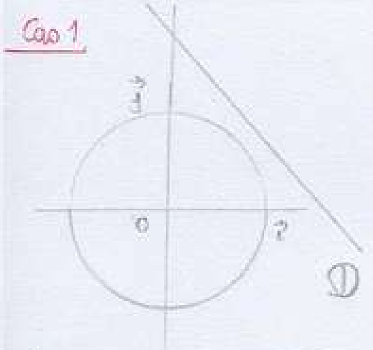
$\mathcal{C}=\mathcal{C}(0,1)$ et $\mathcal{P}^+=\{M(\tilde{x},\tilde{y})\in\mathcal{P} \mid a\tilde{x}+b\tilde{y}-c>0\}$

Pour résoudre (E) on est ramené à un problème géométrique. On doit rechercher l'intersection de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{P}^+$

$D : ax+by-c=0$ $\quad d(O,D)=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

On a donc 3 cas qui apparaissent :

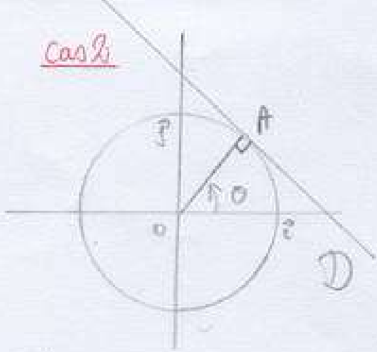
Cas 1



$d(O,D) > 1 \Leftrightarrow |c| > \sqrt{a^2+b^2}$

$\mathcal{C} \cap D = \emptyset$

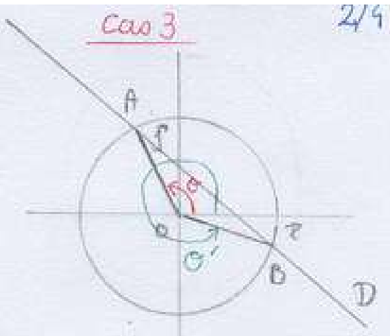
Cas 2



$d(O,D) = 1 \Leftrightarrow |c| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\mathcal{C} \cap D = A$

Cas 3



$d(O,D) < 1 \Leftrightarrow |c| < \sqrt{a^2+b^2}$

$\mathcal{C} \cap D = \{A, B\}$

Cas 1 :

$|c| > \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$ ie $c \neq 0$

• $c < 0 \Rightarrow O \in \mathcal{P}^+$ (car $0a + 0b \underset{>0}{-c} > 0$) donc $\xi = \mathcal{C}$ et $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$

• $c > 0 \Rightarrow O \notin \mathcal{P}^+$ donc $\xi = \emptyset$ et $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

Cas 2 :

$|c| = \sqrt{a^2+b^2}$ on a $c \neq 0$ car $(a,b) \neq (0,0)$

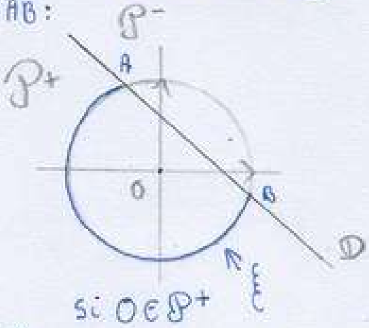
• $c < 0 \Rightarrow O \in \mathcal{P}^+$ (car $0 \times a + 0 \times b - c > 0$ ie $O \in \mathcal{P}^+$) donc $\xi = \mathcal{C} / \{A\}$ $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R} - \{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$

• $c > 0 \Rightarrow O \notin \mathcal{P}^+$ donc $\xi = \emptyset$ $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

Cas 3 :

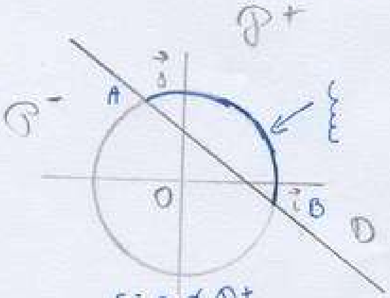
$|c| < \sqrt{a^2+b^2}$ $c \neq 0$

Même raisonnement on regarde si $O \in \mathcal{P}^+$. On en déduit que ξ est l'un des arcs $\widehat{AB}$:



si $O \in \mathcal{P}^+$

$\xi = \mathcal{C} \cap \mathcal{P}^+$



si $O \notin \mathcal{P}^+$

$\xi = \mathcal{C} \cap \mathcal{P}^+$

On en déduit l'ensemble $\mathcal{S}$ correspondant.

Exercice :

Résoudre $2\cos t + \sin t - 3 > 0$

$-\sqrt{3}\cos t - \sin t + 2 > 0$

$2\cos t + 2\sin t - \sqrt{3} > 0$

3. Exercices :

Résoudre $2\cos t + \sin t - 3 > 0$

$-\sqrt{3}\cos t - \sin t + 2 > 0$

$2\cos t + 2\sin t - \sqrt{3} + 1$

1) $\mathcal{P}' = \{M(x,y) \,/\, 2x + y - 3 > 0\}$ où $x = \cos t$ et $y = \sin t$

$d(O,D) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

ici $d(O,D) > 1$ donc on est dans le cas 1)

$O \notin \mathcal{P}' \Rightarrow S = \emptyset$

2) $-\sqrt{3}\cos t - \sin t + 2 > 0$

$\mathcal{P}' = \{M(x,y) \,/\, -\sqrt{3}x - y + 2 > 0\}$

$d(O,D) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$

Donc on est dans le cas 2)

$O \in \mathcal{P}'$ donc $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{C} - \{A\}$ $A \in D$ et $A \in \mathcal{C}$ ie $\begin{cases} \sqrt{3}x_A + y_A = 2 \\ x_A^2 + y_A^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y_A = 2 - \sqrt{3}x_A \\ x_A^2 + y_A^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 2 - \sqrt{3}x_A \\ x_A^2 + (2 - \sqrt{3}x_A)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 2 - \sqrt{3}x_A \\ 4x_A^2 - 4\sqrt{3}x_A + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_A = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Donc $(\vec{i}, \vec{OA}) = \frac{\pi}{6}$ donc $\mathcal{S} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

3) $2\cos t + 2\sin t - \sqrt{3} > 0$

$\mathcal{P}' = \{M(x,y) \,/\, 2x + 2y - \sqrt{3} > 0\}$ ou $x = \cos t$ et $y = \sin t$

$d(O,D) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} < 1$ donc on est dans le cas 3.

$b \neq 0, b > 0$

$\mathcal{P}' = \{M(x,y)$ tq $y > \frac{\sqrt{3}-1}{2} - x\}$

On cherche les coordonnées de A, B : avec $A \in D \cap \mathcal{C}$ et $B \in D \cap \mathcal{C}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - x \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (1-\sqrt{3})x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ y = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - x \end{cases} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$O \notin \mathcal{P}'$ $(\vec{i}, \vec{OA}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\vec{i}, \vec{OB}) = -\frac{\pi}{6}$ donc $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}' = \widehat{BA}$

ie $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

Exposé 26 : Démonstration :

Prop : D non parallèle à $(O, \vec{j})$, elle possède une unique équation de la forme $y = mx + p$ (1).

[Soit D une droite du plan parallèle à $(O, \vec{j})$

D a pour équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$

D a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ non colinéaire à $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

ie $\det(\vec{u}, \vec{j}) = \begin{vmatrix}-b & 0\\ a & 1\end{vmatrix} \neq 0$ ie $b \neq 0$ de $y = -\frac{a}{b}x - c$]

2) Droites parallèles et orthogonales.

Thm : $D : ax + by + c = 0$ $(a,b) \neq (0,0) \neq (a',b')$ et $D' : a'x + b'y + c' = 0$

i) $D // D' \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$ et ii) $D \perp D' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$

[i) $D // D' \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-b & -b'\\ a & a'\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$

vect dir de D   vect dir de D'

ii) $D \perp D' \Leftrightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}' = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$]

vect norm de D   vect norm D

Prop : $D : y = mx + p$ $D // D' \Leftrightarrow m = m'$ $y - mx - p = 0$

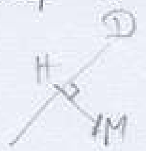
$D' : y = m'x + p'$ $D \perp D' \Leftrightarrow mm' = 1$ $y - m'x - p' = 0$

[$D // D' \underset{\text{Thm}}{\Leftrightarrow} ab' - ba' = 0 \Leftrightarrow 1 \times -m' + m \times 1 = 0 \Leftrightarrow m = m'$

$D \perp D' \underset{\text{Thm}}{\Leftrightarrow} aa' + bb' = 0 \Leftrightarrow 1 + mm' = 0 \Leftrightarrow mm' = -1$]

II Complément sur la droite :

Prop : $D : ax + by + c = 0$ $M(x_M, y_M)$ $d(M, D) = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



$d(M,D) = MH = \dfrac{|\vec{MH}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|a(x_H - x_M) + b(y_H - y_M)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|-ax_M - by_M - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ vect normal à D $M(x_M, y_M)$ $H(x_H, y_H)$ $\vec{MH}\begin{pmatrix}x_H - x_M\\ y_H - y_M\end{pmatrix}$

avec $H \in D$ ie $ax_H + by_H + c = 0$

$ax_H + by_H = -c$