Exposé 25

Equation cartésienne d'une droite du plan. Problème d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes.

Cadre : On se place dans $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$ plan affine euclidien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de $\mathcal{P}$

0. Pré-Requis :

- D droite du plan $\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{P}, \exists \vec{u} \neq \vec{0}$ tq $D = \{M \in \mathcal{P}, \exists k \in \mathbb{R}$ tq $\vec{AM} = k\vec{u}\}$
- colinéarités de deux vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$$

- 2 droites sont parallèles ssi leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

I. Equation cartésienne d'une droite du plan :

1) Equation cartésienne :

Thm : i) Si D est une droite du plan, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ tel que $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow ax + by + c = 0$

ii) Réciproquement $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ l'ensemble $D = \{M(x,y) \mid ax + by + c = 0\}$ est une droite de $\mathcal{P}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

D i) Soit $D(A, \vec{u})$ la droite passant par $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Pour tout point M du plan :

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow \vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta x - \alpha y - \beta x_0 + \alpha y_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \text{ avec } \begin{cases} a = \beta \\ b = -\alpha \\ c = \alpha y_0 - \beta x_0 \end{cases}$$

Donc $D = \{M(x,y) \mid ax + by + c = 0\}$

ii) On considère $D = \{M(x,y) \mid ax + by + c = 0\}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$

$D \neq \emptyset$ en effet $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in D$ où $\begin{cases} x_0 = x_0 \\ y_0 = \dfrac{-c - ax_0}{b} \end{cases}$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow ax + by + c = ax_0 + by_0 + c$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0 \text{ en posant } \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M \in \mathcal{D}(A, \vec{u})$$

donc D est bien une droite du plan. $\square$

Def L'écriture $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ est appelée équation cartésienne de D

Rq : * $D : ax+by+c=0$ alors $kax+kby+kc=0$ ($k \in \mathbb{R}^*$) est aussi une équation cartésienne de D (Il n'y a donc pas unicité.)

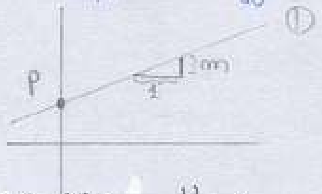
Exemple : Droite passant par $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & x_B-x_A \\ y-y_A & y_B-y_A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(y_B-y_A)+y(x_A-x_B)\underbrace{-x_A(y_B-y_A)+y_A(x_B-x_A)}_{} = 0$; $-x_Ay_B+y_Ax_B=0$. On obtient équation cartésienne de la droite (AB)

b) Équation Réduite :

Prop : Si D non parallèle à $(O, \vec{j})$, elle possède une unique équation de la forme $y = mx+p$ (1)

[Soit D une droite du plan non parallèle à $(O,\vec{j})$ ($D : ax+by+c=0$). Alors $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires
ie $\begin{vmatrix} -b & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ ie $b \neq 0$ et dc $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ (Unicité facile)]

On appelle cette ~~dernière~~ équation, l'équation réduite de D. Elle est unique. m est appelé le coefficient directeur de la droite et p l'ordonnée à l'origine.



où $P(0, p)$

II Problèmes d'intersection et de parallélisme :

1) Cas de deux droites :

Soit deux droites D et D' du plan où $D : ax+by+c=0$, $D' : a'x+b'y+c'=0$

D et D' sont parallèles ssi $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$

[Les droites D et D' sont parallèles ssi leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
$\Rightarrow D // D' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & -a' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a'b - ab' = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$]

Prop (Conséquence) Les deux droites D et D' (définies comme au dessus) sont sécantes ssi $ab'-a'b \neq 0$.

Prop : Une équation cartésienne d'une droite parallèle à $D : ax+by+c=0$ s'écrit $ax+by+\lambda = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
[vect dir colinéaire $v = ku$ $k \in \mathbb{R}^*$ ...]

Pour les équations réduites :

Prop : $D : y = mx+p$ $D' : y = m'x+p$
$D // D' \Leftrightarrow m = m'$ (et donc $D = D' \Leftrightarrow m = m'$ et $p = p'$)

[On a vu que $m = -\frac{a}{b}$ et $m' = -\frac{a'}{b'}$ où $D : ax+by+c$ et $D' : a'x+b'y+c'$ où $c = -pb$ et $c' = -pb'$

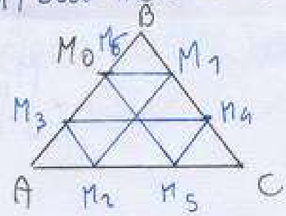
on a vu $D // D' \Leftrightarrow ab'-a'b = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow m = m'$]

2) Cas de trois droites :

Thm : Soit $D : ax+by+c=0$ et $D' : a'x+b'y+c'=0$ deux droites sécantes en A. Alors toute droite du plan passant par A a pour équation
$\lambda(ax+by+c)+\lambda'(a'x+b'y+c') = 0$ $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

III Applications :

1) Soit ABC un triangle : Soit $M_0 \in (AB)$



On trace (M_0M_1) ou $(M_0M_1) // (AC)$ et $M_1 \in (BC)$
....

Mq $M_5 = M_6$.

2) Mq les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exo 1 :

Soit le repère $(A, \vec{AC}, \vec{AB})$ $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $M_0\begin{pmatrix}0\\y_0\end{pmatrix}$ car $M_0 \in (AB) : x=0$

$\boxed{(AB) : x = 0}$
$\boxed{(AC) : y = 0}$

$(BC) : ax + by + c = 0$ avec $\begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$

ie $-ac - bc + c = 0$

$\boxed{(BC) : x + y = 1}$

Ensuite $(M_0M_1) // (AC)$ ie $(M_0M_1) : y = \alpha$ (car $(AC) : y = 0$) de plus $M_0\begin{pmatrix}0\\y_0\end{pmatrix} \in (M_0M_1)$

Dc $\boxed{(M_0M_1) : y = y_0}$

$M_1 \in (BC) \cap (M_0M_1)$

ie $M_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = y_0 \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{M_1\begin{pmatrix}1-y_0\\y_0\end{pmatrix}}$

• $(M_1M_2) // (AB)$ ie $(M_1M_2) : x = \alpha$ (car $AB : x = 0$)

or $M_1 \in (M_1M_2) \Leftrightarrow \boxed{(M_1M_2) : x = 1 - y_0}$ or $M_2 \in (AC)$ ie $M_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $y = 0$

ie $\boxed{M_2\begin{pmatrix}1-y_0\\0\end{pmatrix}}$

• $(M_2M_3) // (BC)$ ie $(BC) : y = 1 - x$

$(M_2M_3) : y = mx + p$ avec $m = -1$ (Thm

$(M_2M_3) : y = -x + p$ or $M_2 \in (M_2M_3)$ ie $0 = -(1 - y_0) + p$

ie $p = 1 - y_0$

Dc $\boxed{(M_2M_3) : y = -x + 1 - y_0}$

$\boxed{M_3\begin{pmatrix}0\\1-y_0\end{pmatrix}}$ car $M_3 \in (AB) \cap (M_2M_3)$

$(M_3M_4) // (AC)$ ie $(M_3M_4) : y = \alpha$ or $M_3 \in (M_3M_4)$ ie $\boxed{(M_3M_4) : y = 1 - y_0}$

et $M_4 \in (BC)$ ie $x + y = 1$
$y = 1 - y_0$
ie $\boxed{M_4\begin{pmatrix}y_0\\1-y_0\end{pmatrix}}$

$(M_4M_5) // (AB)$ ie $\boxed{(M_4M_5) : x = y_0}$ dc $\boxed{M_5 : \begin{pmatrix}y_0\\0\end{pmatrix}}$

et enfin $(M_5M_6) // (BC)$

ie $y = -x + p$ (M_5M_6)

ie $0 = -y_0 + p$ car $M_5 \in (M_5M_6)$

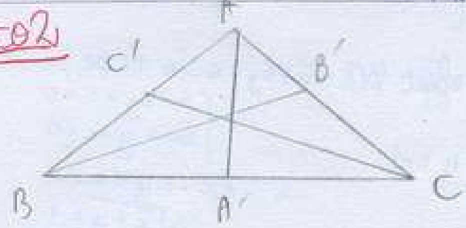
ie $p = y_0$

!!! $M_0 =$

Donc (M_5M_6) : $y = -x + y_0$

or $M_6 \in (AB)$ ie $M_6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$ ie $M_6 \in (M_5M_0)$ ie $\boxed{M_6\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$

Exo2



On se place dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$

$A(0,0)$ $B(1,0)$ $C(0,1)$

$A'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $B'\left(0, \frac{1}{2}\right)$ $C'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Equation de (AB) $y = 0$

———— (AC): $x = 0$

$\boxed{\text{————} (AA'): x - y = 0}$

$ax + by + c = 0$ $A \in AA'$ ie $c = 0$

$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 0$ $a = -b$

Equation de CC': $ax + by + c = 0$

$$\begin{cases} a \times 0 + b + c = 0 \\ a \times \frac{1}{2} + b \times 0 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ \frac{a}{2} + c = 0 \end{cases}$$

ie (CC'): $-2cx - cy + c = 0$

$$\boxed{(CC') : -2x - y + 1 = 0}$$

Equation de BB': $ax + by + c = 0$

$$\begin{cases} a \times 1 + b \times 0 + c = 0 \\ a \times 0 + b \times \frac{1}{2} + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ \frac{b}{2} + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (BB') : -cx - 2cy + c = 0$$

$$\boxed{(BB')\ -x - 2y + 1 = 0}$$

Ancienne méthode.

Soit $I = (AA') \cap (CC')$

ie $I(x_I, y_I)$ vérifient : $\begin{cases} x_I - y_I = 0 \Leftrightarrow x_I = y_I \\ -2x_I - y_I + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x_I + 1 = 0 \end{cases}$

$I = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(x_I = \frac{1}{3} = y_I\right)$

$I \in BB'$? $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = 0$ ie $I \in BB'$ donc (BB'), (CC') (AA') concourantes.

III Applications :

2/3

1) Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

2)

3) Théorème de Menelaus : ABC un triangle

Problème de la Démo

$R \in (AB)$, $Q \in (AC)$ $P \in (BC)$

P, Q, R alignés $\Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$

Prop : Une équation cartésienne d'une droite parallèle à $D : ax+by+c=0$ s'écrit $ax+by+\lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

[Soit $D' = a'x+b'y+c'=0$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ vect dir de D

$\vec{v}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ —— de D'

$D // D'$

ie $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires ie $\vec{v} = k\vec{u}$ $k \in \mathbb{R}^*$

ie $\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-kb\\ka\end{pmatrix}$

ie $D' = a'x+b'y+c'=0$

$kax+kby+c'=0$

$ax+by+\underbrace{\frac{c'}{k}}_{k}=0$]

Concours de 3 droites :

$D : ax+by+c=0$, $D' : a'x+b'y+c'=0$, $D \cap D' = \{A\}$

$D'' \subset \mathcal{P}$, passe par $A \Leftrightarrow \exists \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tq $\lambda(ax+by+c)+\lambda'(a'x+b'y+c')=0$

[Soit $f(x,y) = ax+by+c$ $\quad D = \{M(x,y)\in\mathcal{P} \mid f(x,y)=0\}$

$g(x,y) = a'x+b'y+c$ $\quad D' = \{M(x,y)\in\mathcal{P} \mid g(x,y)=0\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $D\cap D' = \{A\}$

$f(x_A,y_A) = g(x_A,y_A) = 0$

d'où $h(x,y) = \lambda(ax+by+c)+\lambda'(a'x+b'y+c') = \lambda f(x,y)+\lambda' g(x,y)$

$\lambda \underbrace{f(x_A,y_A)}_{0} + \lambda' \underbrace{g(x_A,y_A)}_{0} = 0 \Leftrightarrow \lambda(ax_A+by_A+c)+\lambda'(a'x_A+b'y_A+c') = 0$

donc $\underline{A \in D''}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $D''\subset\mathcal{P}$. $A\in D''$ et $\{A\} = D\cap D'$

Soit $N(x_N,y_N) \in D'' \setminus \{A\}$ on a $(f(x_N,y_N), g(x_N,y_N)) \neq (0,0)$

car $N \neq A$

On considère $h(x,y) = \overbrace{f(x_N,y_N)}^{\lambda'} g(x,y) - f(x,y)\overbrace{g(x_N,y_N)}^{\lambda}$

On a $h(x,y)$ est l'équation du droite du plan : $\Delta = \{M(x,y) \mid h(x,y)=0\}$

$h(x_A,y_A)=0$ car $f(x_A,y_A)=g(x_A,y_A)=0$

$h(x_N,y_N)=0$ car $f(x_N,y_N)g(x_N,y_N)-f(x_N,y_N)g(x_N,y_N)=0$

donc $\Delta = (AN)$

car $A\in\Delta$ et $N\in\Delta$

ie $\Delta = D''$

Donc $D'' : \lambda(ax+by+c)+\lambda'(a'x+b'y+c')$