Exposé 24 :

Théorème de Thalès. Projection dans le plan et dans l'espace, caractère affine des projections.

0. Pré Requis :

- Mesure algébrique
- Calcul vectoriels.
- Espaces affines et vectoriels.
- Géométrie élémentaire.

Cadre : $(E, \vec{E})$ un espace affine

Rappel : Mesure algébrique.
Soit $\mathcal{D}$ une droite de E, et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
$\forall A, B \in \mathcal{D}$, il existe un unique scalaire λ tq $\vec{AB} = \lambda \vec{u}$ ce scalaire est la mesure algébrique du vect $\vec{AB}$ et est noté $\overline{AB}$

I Théorème de Thalès

Thm : Thalès dans le triangle.
Soit deux triangles non applatis OAA' et OBB' tq $A \in (OB)$ et $A' \in (OB')$
Si (AA') parallèle à (BB') alors $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \dfrac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$

[$(AA') // (BB')$ donc $\exists k \in \mathbb{R}$
tq $\vec{BB'} = k \vec{AA'}$
Par hypothèse $A \in (OB)$ et $A' \in (OB')$ ie $\exists \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tq $\vec{OB} = \alpha \vec{OA}$
et $\vec{OB'} = \alpha' \vec{OA'}$

donc $\vec{BB'} = k\vec{AA'} \Rightarrow \vec{OB'} - \vec{OB} = k(\vec{OA'} - \vec{OA}) \Rightarrow \alpha'\vec{OA'} - \alpha\vec{OA} = k\vec{OA'} - k\vec{OA}$

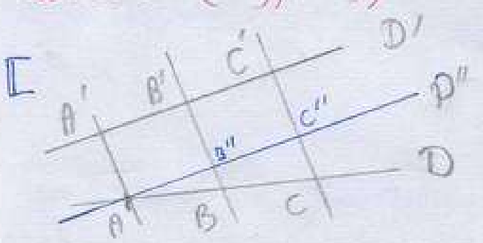
or $\vec{OA}$ et $\vec{OA'}$ sont linéairement indépendants (car OAA' non applati)

$\Rightarrow \alpha' = k = \alpha$

Donc $\vec{OB} = k\vec{OA}$ $\vec{OB'} = k\vec{OA'}$ et $\vec{BB'} = k\vec{AA'}$
Donc on obtient l'égalité souhaité en choisissant les vecteurs directeurs des droites pour la mesure algébrique.]

Thm : de Thalès dans le plan :
Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes, et A, B, C (resp A', B', C') trois points distincts appartenant à $\mathcal{D}$ (resp à $\mathcal{D}'$) avec $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$. Si les droites (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles alors $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$

[

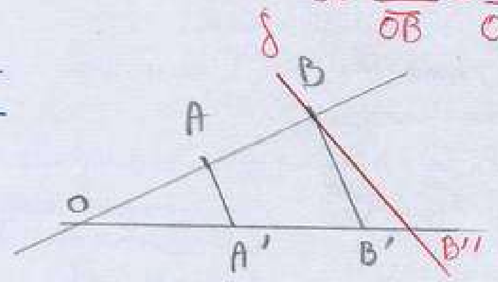


On trace $\mathcal{D}''$ la parallèle à $\mathcal{D}'$ passant par A. On a des parallélogrammes $A'B'B''A$ et $A'C'C''A$ donc on a des égalités vectorielles.
et avec les triangles $AB''B$ et $AC''C$ non applatis on se ramène au théorème de Thalès dans le triangle.]

Thm : Réciproque du Thm de Thalès :

Soit O, A, B, A', B' cinq points d'un plan tels que O, A, B soient alignés et O, A', B' aussi

Si $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$ alors $(AA') // (BB')$

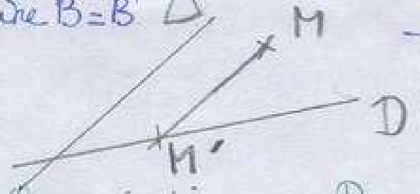


[Soit B'' le point d'intersection de (OA') et et de la droite δ parallèle à (AA') passant par B.

D'après le thm de Thalès, $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB''}}$

on en conclut, par hypothèse que $\overline{OB'} = \overline{OB''}$

c'est à dire $B = B'$]



II Projection dans le plan

1) Projection :

Soit $(P, \vec{P})$ un plan affine.

Def : Soit D et Δ deux droites secante de P. La projection sur D parallèlement à Δ est l'application $p : P \longrightarrow P$

$M \longrightarrow M'$ tq $M' \in D$ et $(MM') // \Delta$

Rq : Un tel point M' existe et est unique puisque D et Δ n'ont pas la même direction (car secantes).

Prop : $p \circ p = p$

$\mathrm{Fix}(p) = D$

2.) Caractère affine des projections dans le plan :

Thm : L'applica $p : P \to P$ (définis au dessus) est affine.

Autrement dit l'application $\pi : \vec{P} \longrightarrow \vec{P}$ est linéaire.

$\vec{u} = \overrightarrow{MN} \longrightarrow \overrightarrow{M'N'}$ où $M' = p(M)$ et $N' = p(N)$

π est la projection vectorielle associée à p.

[• π est bien définie car π ne dépend pas du choix du bipoint MN pour $\vec{u}$ (ie si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_2N_2}$ alors $\pi(\overrightarrow{MN}) = \pi(\overrightarrow{M_2N_2})$)

• Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{P}$, $\pi(\vec{u} + \vec{v}) \overset{?}{=} \pi(\vec{u}) + \pi(\vec{v})$

$\exists M, N, P \in P$ tq $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{NP}$ $\pi(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}) = \pi(\overrightarrow{MP}) = \overrightarrow{p(M)p(N)}$

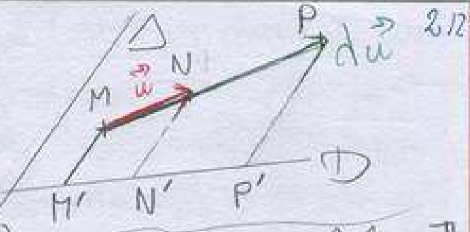
$= \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{p(N)p(P)} = \pi(\overrightarrow{MN}) + \pi(\overrightarrow{NP})$

• Enfin $\pi(\lambda\vec{u}) \overset{?}{=} \lambda\pi(\vec{u})$

Soit $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$\exists M, N, P \in \mathcal{P}$ tq $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ et $\lambda\vec{u} = \overrightarrow{MP}$

Le théorème de thalès permet d'écrire : $\lambda\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'P'}$ ie $\lambda\Pi(\vec{u}) = \Pi(\lambda\vec{u})$



config de Thalès.]

III Projection dans l'espace :

1) Projection

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine :

Si F est un sous espace affine de E on note $F = A + \vec{F} = \{M \in E / \overrightarrow{AM} \in \vec{F}\}$

sous espace affine passant par A de direction $\vec{F}$ où F sous ev de $\vec{E}$

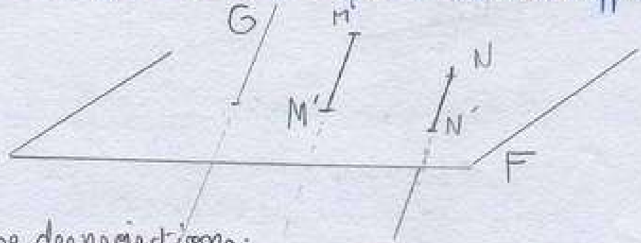
Def : Soit F et G deux sous espaces affines de E de directions $\vec{F}$ et $\vec{G}$ supplémentaires dans $\vec{E}$.

La projection sur F parallèlement à $\vec{G}$ est l'application :

$$p : E \longrightarrow E$$
$$M \longrightarrow M' \text{ tq } F \cap (M + \vec{G}) = \{M'\}$$

Rq: Le fait que $F \cap G = \{M'\}$ vient du fait que $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont supplémentaires ie $\vec{F} \oplus \vec{G} = \vec{E}$

Ex : n = 3



2) Caractère affine des projections :

Thm : La projection $p : E \to E$ sur F parallèlement à G est une application affine. Autrement dit $\pi : \vec{E} \longrightarrow \vec{E}$, $\vec{u} = \overrightarrow{MN} \longrightarrow \overrightarrow{M'N'}$ où $M' = p(M)$ et $N' = p(N)$ est linéaire.

[Même démo que ds II plus on utilise $\vec{F}$ et $\vec{G}$ supplémentaires]

Prop : p conserve barycentres, l'alignement et le rapport des mesures algébriques

[Conséquence p affine]

IV Applications :

1) Thalès dans l'espace de dimension 3 :

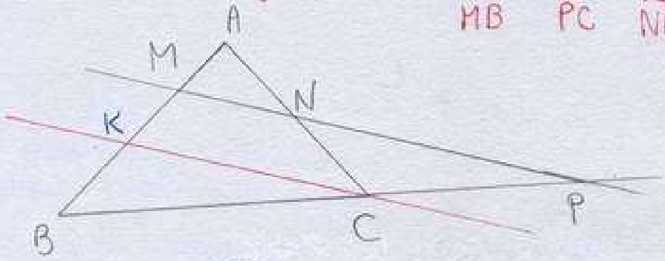
Thm : Soit trois plans parallèles Π_A, Π_B, Π_C. Une droite D qui coupe respectivement ces plans en A, B, C. Et D' une autre droite qui coupe ces plans en A', B', C' alors $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$

[On trace Δ'' // Δ' passant par C. On applique thalès dans le plan formé par Δ et Δ'' puis on a des parallélogrammes de [illegible] Δ' et Δ''

2.) Théorème de Menelaus:

Thm : Soit ABC un triangle non applati et a M, N, P désigne 3 points appartenant respectivement aux droites (AB), (AC), (BC) et distincts des sommets de ABC.

M, N, P alignés $\Longleftrightarrow \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$



[$\boxed{\Rightarrow}$ La parallèle à (MP) passant par C coupe (AB) en K. Le théorème de thalès entraine : $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MK}}$ et $\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \dfrac{\overline{MK}}{\overline{MA}}$

dc $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si M, N, P vérifient $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$. Notons $\{P'\} = (MN) \cap (BC)$

Donc d'après thalès P', M, N alignés donne $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$

donc $\cancel{\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}} \times \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \cancel{\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}} = \cancel{\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}} \times \dfrac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} \times \cancel{\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}} \Longleftrightarrow \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}}$ d'où $P = P'$]