Exposé 22

Résolution des systèmes linéaires par opérations élémentaires sur les lignes : Méthode du pivot. Exemples.

I Définition:

Def: On appelle système linéaire de p équations à n inconnues $x_1,\dots,x_n$ tout système de la forme

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 & L_1 \\ \dots & \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\dots+a_{pn}x_n=b_p & L_p \end{cases}$$

où les a_{ij} $\left(\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}\right)$ sont des réels appelés coefficients de (S)

les b_i $(1\leq i\leq n)$ sont appelés second membre de (S)

On note $L_1,\dots,L_p$ les p- lignes (équations) constituant (S)

Rq: - Si pour tout $i\in\{1,\dots,p\}$ $b_i=0$ on dit que (S) est homogène

- Si $n=p$, on dit que (S) est carré.

Def: On appelle solution du système (S) tout n-uplet $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ vérifiant les p équations du système.

Def: Résoudre un système (S) c'est rechercher toutes les solutions du système (S)

Def: 2 systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions. Dans la suite on travaillera sur (S) un syst linéaire de p équations à n inconnues

II Opérations élémentaires sur les lignes:

Def: On appelle opérations élémentaires sur les lignes de (S) les opérations suivantes :

- permutation de 2 lignes $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- addition à L_i du produit de L_j par un scalaire $L_i \leftarrow L_i+\lambda L_j$

Thm : Les opérations élémentaires transforment un système (S) en un système (S') équivalent.

[C'est évident pour les opérations $L_i \leftrightarrow L_j$ et $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda\neq 0$

Appliquons l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i+\lambda L_j$ au système (S)

La i-ème ligne L_i de (S) s'écrit $f_i(x)=0$ en posant $f_i(x)=a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n-b_i$ et l'équivalence entre (S) et (S') résulte de

$$\begin{cases} f_i(x)=0 \\ f_j(x)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} f_i(x)+\lambda f_j(x)=0 \\ f_j(x)=0 \end{cases}$$]

III Méthode du Pivot de Gauss.

1) Système échelonné.

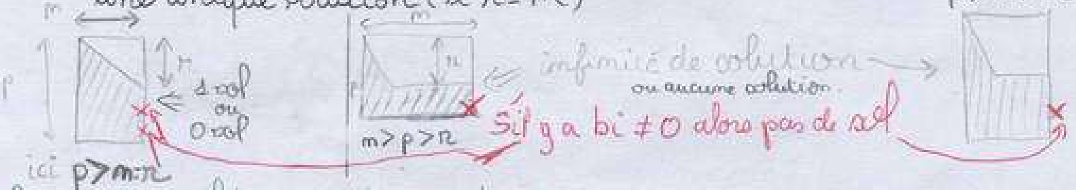
Dans cette partie on prend les notations du I)
soit (S) un système linéaire de p équations à n inconnues.

Def: Le système (S) est échelonné s'il existe $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$, $r \leq p$ tq
$\forall i \in \{1, \dots, r\}$ $a_{ii} \neq 0$ et $\forall i > j$ ou $\forall i > r$ $a_{ij} = 0$

Ex:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\ \quad\; x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ \qquad\quad 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \qquad \text{ici } r = 3$$

Prop: Soit (S) un système échelonné on raisonne suivant la valeur de r
On a déjà $r \leq \min(n, p)$

* Si $r = p$
  * si $p = n$ alors (S) a une solution unique. On dit que (S) est de Cramer.
  * si $p < n$ alors (S) a une infinité de solutions.
* Si $r < p$
  * s'il existe $i > r$ tq $b_i \neq 0$ alors (S) n'a pas de solution ex: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2y = 5 \\ 0 = -2 \end{cases}$ ici $r = 2$
  * si $\forall i > r$, $b_i = 0$ alors (S) a une infinité de solutions ou une unique solution (si $r = n$)



Def: r est appelé rang du système.

2) Méthode du pivot de Gauss.

La méthode de Gauss consiste à construire (S') échelonné équivalent à (S)

Méthode:

Soit (S) un système linéaire comme I).

1) On cherche une ligne où le coefficient $a_{i1} \neq 0$. (On permute les lignes de façon à placer cette dernière en première ligne.
2) Ensuite $\forall i \in \{2, \dots, p\}$ on fait l'opération $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$ (a_{11} : pivot)

on obtient
$$(S) \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ (S_1) \begin{cases} a'_{22} x_2 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{p2} x_2 + \dots + a'_{pn} x_n = b'_p \end{cases} \end{cases}$$

3) On réitère ces deux opérations sur le système (S_1). Et ainsi de suite.

Au bout d'un nombre fini d'opérations, on obtient un système (S') équivalent à (S) de la forme.

$$(S')\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r + \sum_{j=r+1}^{m} \tilde{a}_{1j}x_j = \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2r}x_r + \sum_{j=r+1}^{m} \tilde{a}_{2j}x_j = \tilde{b}_2 \\ \quad \ddots \quad \vdots \\ + \tilde{a}_{rr}x_r + \sum_{j=r+1}^{m} \tilde{a}_{rj}x_j = \tilde{b}_r \\ 0 = \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = \tilde{b}_p \end{cases}$$

~ car, ce n'est pas les m coeff que (S)

Rq: (S') est donc un système échelonné et on a donc les résultats de la partie précédente pour l'existence et le nombre de solutions.

Rq: L'ensemble des solutions forme un espace affine de dimension $m-r$

IV. Exemples :

Résoudre un système linéaire revient matriciellement à résoudre $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{p\times m}$, $X \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^p$

1) L'espace (E) est muni d'un repère cartésien, on considère les 3 plans

$P_1 : x+y+z=0$

$P_2 : 3x-y+z=0$

$P_3 : 2x-2y+\beta z=\alpha$ $\quad (\beta,\alpha) \in \mathbb{R}^2$ donné.

Déterminer $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

Résoudre $\begin{cases} x+y+z=0 & L_1 \\ 3x-y+z=0 & L_2 \\ 2x-2y+\beta z=\alpha & L_3 \end{cases}$

2) Solution unique

Résoudre $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3=3 \\ x_1+x_2-3x_3=-2 \\ 2x_1-x_2+7x_3=7 \end{cases}$

Solution $(-1,5,2)$
On choisit la solution et on fait varier les 3 coeffs au hasard et on calcul le second membre correspondant

2) Infinité de solutions

Résoudre $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=-3 \\ 2x_1+5x_2-5x_3+5x_4=2 & (L_2+2L_1) \\ x_1+x_2-2x_3-3x_4=-12 & (L_3+L_1+L_2) \\ 3x_1+7x_2-8x_3+6x_4=\cancel{1} & (L_1+L_2) \end{cases}$

On part de : $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=-3 & L_1 \\ x_2+x_3+3x_4=8 & L_2 \\ 2x_3-x_4=-1 & L_3 \\ 0=0 \end{cases}$

Infinité de solution (car $r=3$ $\quad r<p=4$, $r<m=4$)

3) Aucune Solution

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=-3 \\ 2x_1+5x_2-5x_3+5x_4=2 \\ x_1+2x_2-2x_3-3x_4=-12 \\ 3x_1+7x_2-8x_3+6x_4=4 \end{cases}$$

On adapte le système précédent en changeant le second membre de L_4