Exposé 21

Niveau 1ère S

Fonctions polynômes du second degré à coefficients réels. ~~constants~~ Mise sous forme canonique ; application à l'étude du sens de variation et la représentation graphique de la fonction. Equations et inéquations du 2^n degré. Exemples calculatoires.

0- Pré Requis

- Identités remarquables.
- variations de $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2\end{array}$

I- fonction polynôme du 2^{nd} degré à coefficients réels.

1) Généralités

Déf : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fct polynôme du second degré à coefficients réels s'il existe 3 réels a, b, c avec $a \neq 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Exemple : $x \mapsto x^2$ (ou en seconde)
$x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$

Rq : Pour un poly du 2^{nd} degré on parle aussi de trinôme.

2) Mise sous forme canonique

Soit f une fct poly du 2^{nd} degré ie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

Def : La dernière écriture de f est appelée forme canonique de f.

Rq : On ne demande pas aux élèves de connaître cette expression mais de savoir la retrouver puisqu'elle permet d'étudier les variations d'un trinôme. et résoudre équations et inéquations.

3) Sens de variation et Représentation graphique :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = ax^2 + bx + c$

$$f(x) + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad (1)$$

soit $\mathcal{C}$ la courbe représentatrice de f dans le ron $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

Considérons un nouveau repère $R'(S, \vec{i}, \vec{j})$ où $S_R\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

Soit $M(x, y)$ ds R et $M(X, Y)$ ds R'

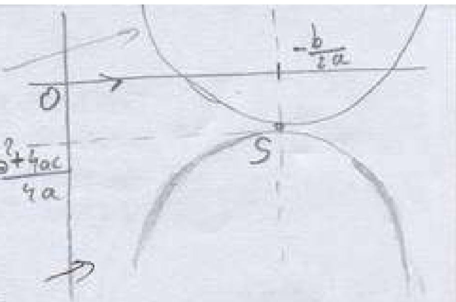
on a $\begin{cases} X = x + \dfrac{b}{2a} \\ Y = y + \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$

Ds (1) on obtient $Y = aX^2$ (qui est une fonction connue)

***a>0**

X	$-\infty$	0	$+\infty$
$Y=aX^2$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$\frac{-b^2+4ac}{4a}$	$\nearrow +\infty$



***a<0**

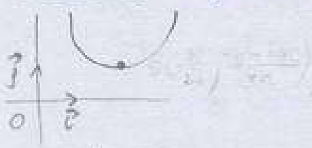
X	$-\infty$	0	$+\infty$
$Y=aX^2$	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$-\frac{b^2+4ac}{4a}$	$\nearrow +\infty$

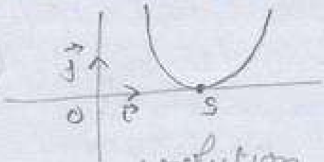
II Equations et inéquations du 2nd degré.

1) Equation : $ax^2+bx+c=0$

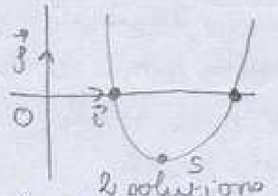
Problème : D'après la représentation graphique de f obtenue on a trois cas de figure :



0 solutions



1 solution



2 solutions

$S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$

La position de S et en particulier son ordonnée $\left(=\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$ détermine le nombre de solution de l'équation.

Def : On appelle discriminant du trinôme la quantité $\Delta = b^2-4ac$.

Rq : Les solutions de l'équation sont aussi appelées racines de l'équation.

Thm : Soit Δ le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$

- si $\Delta<0$ aucune solution réelle
- si $\Delta=0$ une solution unique $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- si $\Delta>0$ deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

[$\forall x \in \mathbb{R}$ $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Si $\Delta>0$ $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

d'où $x_1 = -\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = -\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta=0$ $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ d'où $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta<0$ Soit $x \in \mathbb{R}$ solution du trinôme c'est dire que $\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{<0}$

Absurde donc pas de solution réelle]

Rq : - La condition $ac<0$ suffit pour affirmer que l'équation admet 2 solutions réelles.
- On retrouve bien avec ce théorème le résultat constaté avec l'interprétation graphique

Prop :

Si $\Delta>0$, soit x_1 et x_2 solutions du trinôme alors

$x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

[$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 - a(x_1+x_2)+ax_1x_2 \Rightarrow$ $(x_1+x_2) = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$]

2) Inéquations :

Déf : une inéquation du second degré est de la forme $ax^2+bx+c \geq 0$ ($>$, $<$, $\leq$) ; a, b, c réels, $a \neq 0$

Prop : Soit $f(x) = ax^2+bx+c$

* si $\Delta < 0$ f est du signe de a sur $\mathbb{R}$
* si $\Delta = 0$ f est du signe de a sur $\mathbb{R}$ sauf en $-\frac{b}{2a}$ où f est nulle.
* si $\Delta > 0$ f est du signe de a sur $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ et du signe de $-a$ sur $]x_1, x_2[$ avec x_1, x_2 racines de f et $x_1 < x_2$.

[* $\underline{\Delta < 0}$: $f(x) = a\left(\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{>0}\right)$

* $\underline{\Delta = 0}$: $f(x) = a\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0}$

* $\underline{\Delta > 0}$ Soit x_1, x_2 solution de f. $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

On a donc le tableau de signes suivant :

x		x_1		x_2	
signe de $(x-x_1)$	$-$	0	$+$		$+$
signe de $(x-x_2)$	$-$		$-$	0	$+$
signe de $f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

]

$\sum_{i=0}^{n-1}$ racine n-ième unité $= 0$

$1+x_0+x_0^2+x_0^3+x_0^4 = 0$

$x_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

Exemple : Résoudre $3x^2+5x \leq 3$

III Applications

3) Construction d'un pentagone à la règle et au compas

racine 5ième de l'unité ...

1. Pour quelles valeurs du nombre réel m l'équation en x :

(1) $5x^2-(4m+3)x+(m-2) = 0$ a-t-elle des solutions.

[$\Delta_{(1)} = (4m+3)^2 - 20(m-2) = 16m^2+4m+49$ (2)

l'équation (1) a des solutions ssi $\Delta_{(1)} \geq 0$

ie résoudre l'inéquation $16m^2+4m+49 \geq 0$ (3)

$\Delta_{(2)} = 16 - 16\times 49 < 0$ donc $16m^2+4m+49 \geq 0$ $\forall m \in \mathbb{R}$

ie (1) a des solutions $\forall m \in \mathbb{R}$]

2) Comparer m^m et $m!$

Astuce : le produit de 2 nombres réels est majoré par $\left(\frac{S}{2}\right)^2$ où S est la somme de ces deux nombres.

$0 \leq \frac{m!}{m^m} \leq ?$ On a $m! = m \times (m-1) \times \cdots \times 1$

$m! = 1 \times 2 \times \cdots \times (m-1) \times m$

Donc $(m!)^2 = \prod_{p=1}^{m} p \times (m+1-p)$ or $\forall p \in [\![1, m]\!]$ $p \times (m+1-p) \leq \left(\frac{p+m+1-p}{2}\right)^2$

Donc $(m!)^2 \leq \left(\frac{m+1}{2}\right)^{2m}$ ie $(m!) \leq \frac{(m+1)^m}{2^m}$ ie $0 \leq \frac{m!}{m^m} \leq \left(\frac{m+1}{m}\right)^m \times \frac{1}{2^m}$ $\boxed{\leq \frac{e}{2^m}}$

$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \times \frac{1}{2^m}$